Galois-Descent

im Seminar „Definitionskörper von Kurven und der Satz von Belyi“

Anja Randecker

12. Juni 2009

Definition (Charaktere)
Sei G eine Gruppe, K ein Körper.
Dann heißt ein (Gruppen-)Homomorphismus $\chi : G \to K^\times$ *K-wertiger Charakter* von G.

Die K-wertigen Charaktere von G bilden eine Gruppe.

Proposition (Lineare Unabhängigkeit von Charakteren)
Sei G eine Gruppe, K ein Körper.
Dann sind verschiedene K-wertige Charaktere von G linear unabhängig in $Abb(G, K)$.

Definition (Tensorprodukt von Vektorräumen)
Sei K ein Körper, V und W zwei K-Vektorräume.
Dann ist ein *Tensorprodukt* von V und W ein K-Vektorraum $V \otimes_K W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\tau : V \times W \to V \otimes_K W$, so dass gilt:
Für jeden weiteren K-Vektorraum X und jede K-bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to X$ gibt es genau eine K-lineare Abbildung $\Phi : V \otimes_K W \to X$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V \otimes_K W \arrow[dl, dashed, "\exists! \Phi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Das Tensorprodukt existiert immer und ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

Proposition ($K' \otimes_K V$ ist K'-Vektorraum)
Sei K'/K eine Körpererweiterung und V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i \in I}$.
Dann ist der K'-Vektorraum V', der durch die Basis $(v_i)_{i \in I}$ gegeben ist, das Tensorprodukt von K' mit V ($V' \cong K' \otimes_K V$).

Definition ($\boldsymbol{K}$-Form und „definiert über $\boldsymbol{K}$")
Sei K'/K eine Körpererweiterung, V' ein K'-Vektorraum, V ein K-Untervektorraum von V' (d.h. V' wird als K-Vektorraum aufgefasst).

(i) V heißt *K-Form* von V', wenn $K' \otimes_K V \cong V'$ als K'-Vektorräume.

Wähle dann Basis $(v_i)_{i \in I}$ von V, das ist auch Basis von V'.

(ii) Ist V K-Form von V', dann heißt ein K'-Untervektorraum $U' \subseteq V'$ *über K definiert*, wenn es eine K'-Basis von U' gibt, die in V liegt.

Der entsprechende K-Vektorraum U zu dieser Basis ist K-Form von U'.

(iii) Sind V' und W' K'-Vektorräume mit K-Formen V und W, dann heißt der K'-Homomorphismus $\varphi' : V' \to W'$ *über K definiert*, wenn $\varphi(V) \subseteq W$ gilt.

Proposition (Alternative Definition $\boldsymbol{K}$-Form und „definiert über $\boldsymbol{K}$")
Sei K'/K eine Körpererweiterung, V' ein K'-Vektorraum, V ein K-Untervektorraum von V'.
Betrachte den Funktor $K' \otimes_K \cdot : \underline{K - \text{Vektorräume}} \to \underline{K' - \text{Vektorräume}}$, der durch $V \mapsto K' \otimes_K V$ und $(\varphi : V \to W) \mapsto (\varphi' : K' \otimes_K V \to K' \otimes_K W, k' \otimes v \mapsto k' \otimes \varphi(v))$ gegeben ist.
Dann sind Vektorräume V' bzw. Unterverktorräume $U' \subseteq V'$ bzw. K'-Homomorphismen φ' über K definiert, wenn sie isomorph zu einem Vektorraum bzw. Homomorphismus im Bild von $K' \otimes_K \cdot$ sind

Definition (Kanonische $\boldsymbol{G}$-Aktion)
Sei K'/K eine Körpererweiterung, so dass $K = K'^G$ für eine Gruppe $G \subseteq \text{Aut}(K')$ ist, d.h. K ist Fixkörper unter G.
Sei weiter V' ein K'-Vektorraum mit K-Form V und sei $(v_i)_{i \in I}$ Basis von V.
Definiere dann für jedes $\sigma \in G$ eine Abbildung $f_\sigma : V' \to V'$, $\sum\limits_{i \in I} a_i v_i \to \sum\limits_{i \in I} \sigma(a_i) v_i$.
Das kann man über $V' \cong K' \otimes_K V$ auch charakterisieren durch $f_\sigma(a \otimes v) = \sigma(a) \otimes v$.
Die Abbildungen f_σ sind σ-linear, d.h. $f_\sigma(av + w) = \sigma(a) f_\sigma(v) + f_\sigma(w)$ für alle $a \in K', v, w \in V'$.
Es gilt außerdem $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$ für $\sigma, \tau \in G$ und $f_e = \text{id}_{V'}$ für das Neutralelement $e \in G$.
Daher lässt sich eine Aktion $G \times V' \to V'$, $(\sigma, v) \mapsto f_\sigma(v)$ definieren. Diese heißt die zur K-Form V von V' gehörige *kanonische G-Aktion.*

Satz 1 (Charakterisierung mittels der kanonischen $\boldsymbol{G}$-Aktion)
Sei K'/K eine Körpererweiterung, so dass $K = K'^G$ für eine Gruppe $G \subseteq Aut(K')$ ist. V' bzw. W' seien K'-Vektorräume mit K-Formen V bzw. W und zugehöriger G-Aktion f bzw. g.
Dann gilt:

(i) $v \in V'$ ist aus $V \Leftrightarrow f_\sigma(v) = v$ für alle $\sigma \in G$.

(ii) *Ein K'-Untervektorraum $U' \subseteq V'$ ist über K definiert $\Leftrightarrow$ $f_\sigma(U') \subseteq U'$ für alle $\sigma \in G$.*

(iii) *$\varphi' : V' \to W'$ ist über K definiert $\Leftrightarrow$ φ' ist mit allen $\sigma \in G$ verträglich, d.h. $\varphi'(f_\sigma(v)) = g_\sigma(\varphi'(v))$ für alle $\sigma \in G$ und $v \in V'$.*

Satz 2 (Konstruktion einer K-Form)
Sei K'/K eine Körpererweiterung, so dass $K = K'^G$ für eine Gruppe $G \subseteq Aut(K')$ ist. Sei V' ein K'-Vektorraum.
Weiter sei für jedes $\sigma \in G$ eine σ-lineare Abbildung $f_\sigma : V' \to V'$ gegeben mit $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$ und $f_e = id_{V'}$ für das Neutralelement $e \in G$.
Die von den f_σ definierte G-Aktion auf V' heiße f. $V \subseteq V'$ sei die Fixmenge unter G. Dann gilt:

(i) *V ist ein K-Untervektorraum von V'.*

(ii) *Die von $\lambda : V \to V'$ induzierte K'-lineare Abbildung $\lambda' : K' \otimes_K V \to V'$ ist injektiv.*

(iii) *Ist G endlich, so ist λ' surjektiv.*

Korollar (Zusammenhang zwischen K-Vektorräumen und G-Aktionen)
Sind K'/K, V', V und die Aktion f wie oben und ist G endlich, so ist V eine K-Form von V'.
Für festes endliches G und festes V' entsprechen also die K-Formen von V' genau den G-Aktionen auf V'.

Satz 3
Sei K' ein Körper, $K := K'^G$ für eine endliche Untergruppe G von $Aut(K')$ und X/K' eine Varietät.
Weiter sei für jedes $\sigma \in G$ eine birationale Abbildung $f_\sigma : X^\sigma \to X$ über K' gegeben mit $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ f_\tau^\sigma$ für alle $\sigma, \tau \in G$.
Dann gibt es eine Varietät X_K über K, so dass $X_K \times_K K'/K'$ birational äquivalent zu X/K' ist.