Differentialformen

Jonathan Zachhuber Felix Wellen

30. November 2011

Wir möchten gerne Differentialformen verstehen. Nach einer kurzen Motivation in der Welt der reellen Mannigfaltigkeiten, wenden wir uns zunächst dem Ansatz von [Sha74] zu. Als Anwendung wollen wir den Satz von Riemann-Roch verstehen.

1 Ableiten auf Mannigfaltigkeiten

Für Grundlagen und Details zu diesem Abschnitt empfiehlt es sich in [Spi65] zu schauen.

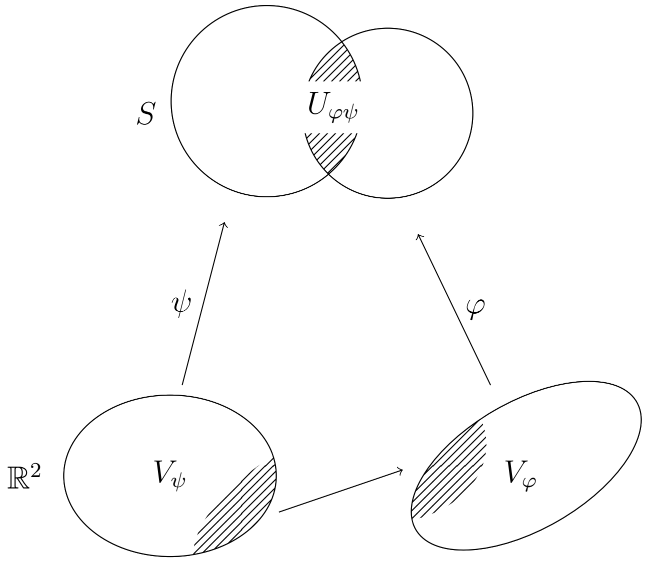
Sei S eine reelle 2-Mannigfaltigkeit[1] mit $\mathcal{C}^\infty$-Kartenwechseln. Das heißt: Sind $\varphi\colon V_\varphi \hookrightarrow S$ und $\psi\colon V_\psi \hookrightarrow S$ zwei Karten, $V_\varphi, V_\psi \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, so ist für $U_{\varphi\psi} := \varphi(V_\varphi) \cap \psi(V_\psi)$ der Kartenwechsel

$$\varphi^{-1}_{|U_{\varphi\psi}} \circ \psi_{|\psi^{-1}(U_{\varphi\psi})}\colon \psi^{-1}(U_{\varphi\psi}) \longrightarrow \varphi^{-1}(U_{\varphi\psi})$$

beliebig oft differenzierbar.
Wir wollen uns nun überlegen, wie man Funktionen auf S ableiten kann – und was das überhaupt heißen soll. Vergleichsweise einfach ist es, zu definieren, was eine differenzierbare Funktion auf S ist:

Definition 1.1: Sei $\varphi\colon V_\varphi \xrightarrow{\sim} U_\varphi := \varphi(V_\varphi) \hookrightarrow S$ eine Karte. Dann heißt $f\colon U_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar*, wenn $f\circ\varphi\colon V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion $\mathbb{R}^2 \supseteq V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ ist. Und eine Abbildung $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn sie auf jeder Karte differenzierbar ist, also für alle Karten $\psi\colon V_\psi \longrightarrow S$, die Funktion $f\circ\psi\colon V_\psi \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Analog seien n-mal differenzierbar und beliebig oft differenzierbar für Funktionen auf S definiert.
Zur besseren Handhabung bezeichne[2] $\mathcal{C}^\infty(U)$ für jedes offene $U \subseteq S$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren – also glatten – Funktionen auf U.

[1] Alles weitere kann man ähnlich für beliebige endliche Dimensionen machen.
[2] Differenzierbarkeit ist von der Karte unabhängig, weil die Kartenwechsel beliebig oft differenzierbar sind.



Nun stellt sich natürlich die Frage, was denn die Ableitung einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ ist. Wir wollen das zunächst auf einer festen Karte $U_\varphi := \varphi(V_\varphi) \subseteq S$ untersuchen. Dazu sei für eine glatte Funktion $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ die ganz normale partielle Ableitung nach x mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet. Diese lässt sich auf eine Karte $\varphi\colon V_\varphi \xrightarrow{\sim} U_\varphi := \varphi(V_\varphi) \hookrightarrow S$ übertragen und heißt dann

$$d_\varphi x := \frac{\partial}{\partial x}\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(U_\varphi) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(U_\varphi) \\ f & \longmapsto & \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

Und genauso erhält man mit der partiellen Ableitung nach y:

$$d_\varphi y := \frac{\partial}{\partial y}\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(U_\varphi) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(U_\varphi) \\ f & \longmapsto & \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y} \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

Das große Problem ist nun, dass Ableiten auf einer anderen Karte $\psi\colon V_\psi \xrightarrow{\sim} U_\psi \hookrightarrow S$, die nichtleeren Schnitt mit U_φ hat, eventuell auf dem Schnitt $U_{\varphi\psi}$ nicht konsistent ist – also die Einschränkungen auf den Schnitt verschieden sein können:

$$d_\varphi x|_{\mathcal{C}^\infty(U_{\varphi\psi})} \neq d_\psi x|_{\mathcal{C}^\infty(U_{\varphi\psi})}$$

Aufgabe 1.1: Da uns nur interessiert, was auf dem Schnitt zweier Karten passiert, wollen wir uns auf Karten mit identischem Bild in S beschränken. Seien nun also $\varphi\colon V_\varphi \longrightarrow S$ und $\psi\colon V_\psi \longrightarrow S$ zwei Karten mit $U_{\varphi\psi} := \varphi(V_\varphi) = \psi(V_\psi)$, dann lassen sich $d_\varphi x$ und $d_\varphi y$ als Linearkombinationen von $d_\psi x$ und $d_\psi y$ mit Koeffizienten in

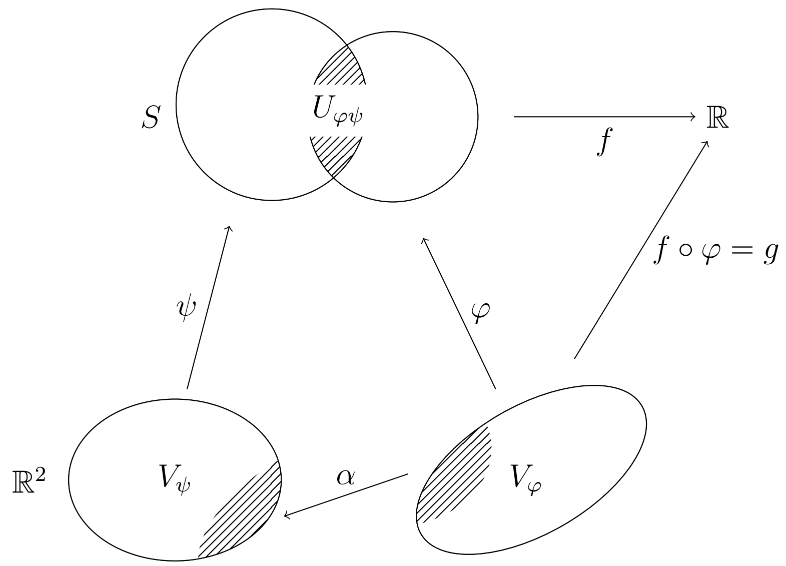
$C^\infty(U_{\varphi\psi})$ schreiben.
Hinweis/Erinnerung: Zur Lösung kann man die Kettenregel verwenden. Diese besagt Folgendes: Sind $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ und $h\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^l$ differenzierbar auf A, B, und bezeichnet

$$J_a(f) \coloneqq \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die Jacobimatrix von f in $a \in A$, dann gilt:

$$J_a(g \circ h) = J_{h(a)}(g) \cdot J_a(h)$$

Zur Übersicht gibt es noch ein Bild[3] der Situation:



Lösung: Sei $U_{\varphi\psi}$ wie oben. Die Kartenwechsel $\alpha \coloneqq \psi^{-1} \circ \varphi\colon V_\varphi \longrightarrow V_\psi$ und $\alpha^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ sind Diffeomorphismen und wir wollen mit α_x, α_y die Komponenten bezeichnen. Gesucht sind nun $a, b \in \mathcal{C}^\infty(U_{\varphi\psi})$ mit

$$d_\varphi x = a \cdot d_\psi x + b \cdot d_\psi y$$

Mit der Kettenregel können wir nun untersuchen, wie Ableiten auf U_φ mit Ableiten auf U_ψ zusammenhängt, indem wir uns ansehen, was passiert, wenn wir statt einer Funktion auf V_φ die Verkettung mit α auf V_ψ ableiten. Seien also $g\colon V_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt und $g \coloneqq \tilde{g} \circ \alpha$, $\tilde{g} = g \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt mit der Kettenregel:

$$J_x(g) = J_x(\tilde{g} \circ \alpha) = J_{\alpha(x)}(\tilde{g}) \cdot J_x(\alpha) \text{ für alle } x \in V_\varphi$$

[3] Welches, wie auch das erste, netterweise von Anja gemalt wurde. Leider sind beide Bilder aus technischen Gründen weniger schön als Anjas Originalverversionen.

Für die erste Spalte von $J_x(g)$ liefert Ausrechnen der rechten Seite:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} \circ \alpha \right) + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y} \circ \alpha \right)$$

Jetzt erst verwenden wir die Karten. Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\varphi)$ mit $g = f \circ \varphi$ und damit $\tilde{g} = f \circ \psi$ gilt nun:

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x} \circ \varphi^{-1} = \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f \circ \psi}{\partial x} \circ \psi^{-1} \right) + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f \circ \psi}{\partial y} \circ \psi^{-1} \right) \right)$$

Und weil man das mit jedem $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\varphi)$ machen kann, gilt:

$$d_\varphi x = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \cdot d_\psi x + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \circ \varphi^{-1} \cdot d_\psi y$$

Soweit haben wir also bemerkt, dass etwa Ableiten nach x, also eine Abbildung $d_\varphi x$, zwar nicht mit der analogen Abbildung $d_\psi x$ auf einer anderen Karte übereinstimmen muss, aber immerhin jede Ableitung auf irgendeiner Karte als Linearkombination der einfachen Ableitungen dx und dy auf einer beliebigen anderen Karte geschrieben werden kann. Wir haben also gesehen, dass wir uns in der Welt der Mannigfaltigkeiten nicht mehr auf Ableiten nach x und y beschränken können, sondern zu Linearkombinationen davon übergehen müssen. Außerdem zeigt die Übungsaufgabe den Zusammenhang solcher Linearkombinationen – da wir wissen was mit $d_\varphi x$ und $d_\varphi y$ zu tun ist, können wir durch lineare Fortsetzung auch beliebige Linearkombinationen auf andere Karten übertragen. Diese bilden für jede Karte U_φ einen $\mathcal{C}^\infty(U_\varphi)$-Modul, was in der folgenden Definition präzisiert und erweitert wird.

Definition 1.2: Sei $\varphi\colon V_\varphi \hookrightarrow S$ eine Karte und $U_\varphi \coloneqq \varphi(V_\varphi)$. Dann bezeichnet

$$\tilde{\Omega}_S(U_\varphi) \coloneqq \{a \cdot d_\varphi x + b \cdot d_\varphi y \mid a, b \in \mathcal{C}^\infty(U_\varphi)\}$$

den *Modul der Derivationen* auf U_φ. Das ist unabhängig von φ, wenn man $\Omega(U_\varphi)$ als Teilmenge von $\mathrm{Abb}(\mathcal{C}^\infty(U_\varphi), \mathcal{C}^\infty(U_\varphi))$ auffasst. Wir werden gleich sehen, dass folgende Verallgemeinerung wohldefiniert ist: Für beliebiges offenes $U \subseteq S$ sei

$$\Omega_S(U) \coloneqq \{\phi\colon \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(U) \mid \text{Es gibt } U_i \text{ mit } \bigcup U_i = U \text{ und } \phi_{|U_i} \in \tilde{\Omega}_S(U_i)\}$$

Wohldefiniertheit: Wir geben den dafür interessanten Abbildungen zunächst einen Namen:

$$\Phi_{\varphi\psi}\colon \begin{array}{ccc} \tilde{\Omega}_S(U_\varphi)_{|U_{\varphi\psi}} & \longrightarrow & \tilde{\Omega}_S(U_\psi)_{|U_{\varphi\psi}} \\ \phi = a \cdot d_\varphi x + b \cdot d_\varphi y & \longmapsto & a \cdot \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \cdot d_\psi x + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \cdot d_\psi y \right) + b \cdot \ldots \end{array}$$

Für die Wohldefiniertheit müssen wir nun glauben, dass etwa $\Phi_{\varphi\psi} \circ \Phi_{\chi\varphi} = \Phi_{\chi\psi}$ gilt und alle $\Phi_{\varphi\psi}$ für zusammenhängende U_φ, U_ψ Isomorphismen sind.

Wir wollen uns nun anschauen, was an einzelnen Punkten $p \in S$ in $\Omega_S(U)$ passiert. Dazu wird p in jedes $\phi \in \Omega_S(U)$ eingesetzt. Das führt zu einem 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, dem Tangentialraum an p:

$$T_p \coloneqq \{a(p) \cdot \mathrm{d}_\varphi x + b(p) \cdot \mathrm{d}_\varphi y \mid a, b \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$$

Interessant ist auch der Kotangentialraum T_p^* und die entsprechenden Moduln, deren Definition wir jetzt noch nicht vollständig verstehen können, weil wir noch nicht wissen, was „glatt“ hier heißt:

$$\omega_S(U) \coloneqq \{\omega \colon U \longrightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p^* \mid \omega(p) \in T_p^*, \omega \text{ ist lokal durch glatte Funktionen gegeben.}\}$$

Definition 1.3: Die Elemente von $\omega_S(S)$ heißen *Differentialformen* auf S oder auch 1-Formen.

Das werden wir nachher noch mit Garben genauer definieren. Aber zuerst schauen wir uns noch kurz Riemann'sche Flächen an.

Sei S nun eine Riemann'sche Fläche, d.h. S ist zusammenhängend und wenn $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{C}$ aufgefasst wird, sind die Kartenwechsel holomorph. Für eine Karte $z \colon V_z \hookrightarrow S$ gilt dann

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}_z x + \mathrm{i} \cdot \mathrm{d}_z y \text{ und } \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}_z x - \mathrm{i} \cdot \mathrm{d}_z y$$

Passend zur neuen Situation wollen wir nun anstelle der glatten Funktionen holomorphe und meromorphe Funktionen auf S betrachten. Beides lässt sich analog definieren.

Definition 1.4: Eine Funktion $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, für offenes $U \subseteq S$, heißt *holomorph* (*meromorph*), wenn für alle Karten z die Komposition $f \circ z$ holomorph (meromorph) ist.

Die Menge der holomorphen Funktionen auf $U \subseteq S$ wird mit $\mathcal{O}_S(U)$ bezeichnet und die der meromorphen mit $\mathcal{M}(U)$.

Weil bei holomorphen/meromorphen Funktionen gerade die Ableitung nach $d\bar{z}$ null ist, haben die meromorphen Differentialformen eine Dimension weniger, und bilden insbesondere Vektorräume über dem Körper der meromorphen Funktionen. Das ist analog zu Differentialformen auf algebraischen Kurven, die wir morgen noch betrachten werden.

2 Garben

Der Begriff der Garbe bietet die Möglichkeit, formal festzuhalten, wann etwa eine Eigenschaft von Funktionen *lokal* ist. Um nicht von der Definition erschlagen zu werden, wollen wir zunächst die für den Garbenbegriff relevanten Eigenschaften der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachten.

Wir wollen uns nun einige Tatsachen in diesem Zusammenhang überlegen, die trivial erscheinen mögen, aber eben gerade den Anforderungen an eine Garbe entsprechen. Dazu sei für offenes $U \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathcal{C}(U) \coloneqq \{f \colon U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

die Menge, bzw. der Ring der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Gilt nun $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}$ für offene Teilmengen, dann gibt es die *Einschränkung* auf V:

$$-_{|V}\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(U) & \longrightarrow & \mathcal{C}(V) \\ f & \longmapsto & f_{|V} \end{array}$$

Für drei offene Teilmengen $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathcal{C}(U)$ gilt

$$f_{|W} = \left(f_{|V}\right)_{|W}$$

Den Einschränkungen sind also Zwischenschritte egal[4]. Sei nun $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nicht unbedingt stetige Abbildung und $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Überdeckung von $\mathbb{R}$, also jedes U_i eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f_{|U_i} \in \mathcal{C}(U_i) \text{ für alle } i \in \mathcal{I} \ \Rightarrow f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

oder in Worten: Wenn f auf jedem U_i stetig ist, dann ist f auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Das führt zu einer großartigen Übungsaufgabe:

Aufgabe 2.1: Seien X, Y topologische Räume[5] und $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Überdeckung von $U \subseteq X$ und für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine Abbildung $f_i\colon U_i \longrightarrow Y$ gegeben. Man zeige: Wenn für alle $i, j \in \mathcal{I}$ gilt:

$$f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$$

dann kann man die f_i zu einer Abbildung auf U „verkleben“ – das soll heißen, dass es eine Abbildung $f\colon U \longrightarrow Y$ mit

$$f_{|U_i} = f_i$$

gibt. Zeige das nicht wirklich – kurz überlegen und nicken reicht eigentlich.

Aufgabe 2.2: Selbe Situation wie in der vorangegangenen Aufgabe.
Bezeichne nun $C(X, Y)$ die Menge der stetigen Funktionen von X nach Y. Seien diesmal die f_i stetige Abbildungen nach Y, also

$$f_i \in \mathcal{C}(U_i, Y)$$

und es gelte wieder, genau wie oben:

$$f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$$

Zeige: Es gibt genau ein $f \in \mathcal{C}(U, Y)$, sodass

$$f_{|U_i} = f_i$$

gilt.

[4] Kategorientheoriekenner sehen hier einen kontravarianten Funktor von der Ordnungskategorie der offenen Mengen in $\mathbb{R}$ in die Kategorie der Ringe.

[5] Wer das nicht kennt, mag oder zu schwierig findet, kann auch einfach $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ nehmen.

Aufgabe 2.3: Sei U_i eine offene Überdeckung von X. Man beziehe zu folgenden Aussagen Stellung:

(a) Eine Teilmenge $V \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn alle $U_i \cap V$ offen in U_i sind.

(b) Eine Teilmenge $K \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn alle $K \cap U_i$ kompakt in U_i sind.

(c) Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn alle $f_{|U_i}$ beschränkt sind.

Aufgabe 2.4: *Beschäftigung für Kenner:* Finde eine nette Beschreibung für die étalen Räume von lokal konstanten Garben, die keine globalen Schnitte haben. Erinnere dich gegebenenfalls selbst daran, wie der étale Raum definiert ist – das ist alles kanonisch.

Anschließend möchte man vielleicht noch über Fundamentalgruppen nachdenken...

Nun abstrahieren wir. In der folgenden Definition wird $\mathcal{C}(U)$ durch $\mathcal{F}(U)$ ersetzt und außerdem noch (U) weggelassen, also nur noch $\mathcal{F}$ geschrieben. Wie bei Abbildungen eben. Nur ist das leider streng genommen keine Abbildung mehr, womit wir uns aber jetzt nicht aufhalten wollen und uns $\mathcal{F}$ einfach als Mengen-, Gruppen- oder Ringwertige Abbildung vorstellen, die also etwa jeder offenen Teilmenge eines topologischen Raums einen Ring zuordnet.

Definition 2.1: (a) Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Zuordnung, die jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ eine Menge $\mathcal{F}(U)$ zuordnet, und es für alle offenen $V \subseteq U \subseteq X$ eine Abbildung

$$-|_{\mathcal{F}}V$$

gibt, sodass diese Abbildung mit Teilmengenbeziehungen kompatibel sind, d.h. für $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ und alle $f \in \mathcal{F}(U)$ gilt

$$f_{|W} = \left(f_{|V}\right)_{|W}$$

In diesem Fall heißt $\mathcal{F}$ *Prägarbe* auf X.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Überdeckung von $U \subseteq X$ und $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$. Die f_i heißen *konsistent*, wenn gilt:

$$f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}$$

Und $\mathcal{F}$ heißt *Garbe*, wenn es zu jeder Überdeckung $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von beliebigem offenen $U \subseteq X$ und jeder konsistenten Familie $(f_i)_{i\in\mathcal{I}}$ genau ein $f \in \mathcal{F}(U)$ gibt, sodass

$$f_i = f_{|U_i} \text{ für alle } i \in \mathcal{I}$$

gilt.

Eine gute Quelle für Garben ist folgende Konstruktion:
Seien X, Y topologische Räume und $f\colon Y \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Für $U \subseteq X$ heißt ein $s\colon U \longrightarrow Y$ *Schnitt* auf U, wenn

$$f \circ s = \mathrm{id}_U$$

gilt.

Aufgabe 2.5: Sei für $U \subseteq X$ die Menge der stetigen Schnitte von f auf U mit $S_f(U)$ bezeichnet, dann ist S_f eine Garbe.

Tatsächlich sind sogar alle Garben – bis auf Isomorphie, was auch immer das hier heißen soll – Schnittgarben einer stetigen Abbildung. Das wollen wir hier nicht machen, aber trotzdem möchten wir Elemente $s \in \mathcal{F}(U)$ ab jetzt auch – wie allgemein üblich – Schnitte nennen. Um unser landwirtschaftlich anmutendes Vokabular noch zu erweitern, wollen wir nun noch über Halme und Keime reden.

Definition 2.2: Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $x \in X$ ein Punkt.

(a) Ein *Keim* bei x ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (f, U) bestehend aus einer offenen Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und einem Schnitt $f \in \mathcal{F}(U)$. Zwei solche Paare (f, U) und (g, V) sind äquivalent, wenn es ein offenes $W \subseteq X$ mit $x \in W \subseteq U, V$ gibt, sodass

$$f_{|W} = g_{|W}$$

(b) Der *Halm* von $\mathcal{F}$ bei x ist nun einfach die Menge aller Keime bei x und wird mit $\mathcal{F}_x$ bezeichnet.

Aufgabe 2.6: (a) Was sind die Halme der Garbe der Schnitte der Überlagerung

$$\pi\colon \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

(b) Was sind die Halme von Garben von Schnitten von Überlagerungen?

Aufgabe 2.7: Was sind die Halme der Garbe der holomorphen Funktionen auf einer Riemannschen Fläche S?

Eine letzte Bemerkung: Zu jeder Prägarbe gibt es die Garbifizierung. Das ist eine Garbe, die zumindest die Eigenschaft erfüllt, dass jeder kleine Teil der Prägarbe, der schon eine Garbe war, erhalten bleibt. Für praktische Belange heißt das, dass sich Garben lokal definieren lassen.

Aufgabe 2.8: Sei für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mathcal{O}(U)$ der Ring der lokal rationalen[6] Funktionen bezeichnet, d.h. für $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$f \in \mathcal{O}(U) \Leftrightarrow$ Für jedes $x \in U$ existiert offenes $x \in V_x \subseteq U$, sodass $f_{|V_x}$ rational ist.

Das ist eine Garbe von Ringen. Man glaube, dass auch die Halme Ringe sind und überlege sich, wie diese aussehen.

[6] D.h. Quotient von Polynomen

Aufgabe 2.9: Finde alle Garben im ersten Abschnitt.

Wir wollen uns nun das *Tangentialbündel* einer 2-Mannigfaltigkeit S anschauen. Das ist als Menge erstmal

$$TS := \bigsqcup_{p \in S} T_p$$

Auf Kartenumgebungen U_φ lässt sich das mit dem Produkt $U_\varphi \times \mathbb{R}^2$ identifizieren, indem ein $(x, a(x)d_\varphi x + b(x)d_\varphi y) \in \bigsqcup_{p \in U_\varphi} T_p \subseteq TS$ auf $(\varphi^{-1}(x), a(x), b(x))$ abgebildet wird. Damit können wir die Produkttopologie von den $U_\varphi \times \mathbb{R}^2$ auf S rüberziehen[7].

Definition 2.3: Ein *Vektorfeld* ist ein Schnitt $V\colon S \longrightarrow TS$ der Projektion

$$\pi\colon \begin{array}{ccc} TS & \longrightarrow & S \\ a(p)d_\varphi x + b(p)d_\varphi y & \longmapsto & p \end{array}$$

Ein Vektorfeld V heißt stetig, wenn V eine stetige Abbildung ist. Und V heißt differenzierbar, wenn es lokal durch differenzierbare Funktionen gegeben ist. Das heißt genau, dass V ein Element von $\Omega_S(S)$ ist.

Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und einen Punkt $p \in S$ betrachten wir nun die Abbildung, die einem Vektor aus dem Tangentialraum die Ableitung von f in Richtung des Vektors zuordnet

$$df_p\colon \begin{array}{ccc} T_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a(p)d_\varphi x + b(p)d_\varphi y & \longmapsto & a(p)\left(d_\varphi x(f)\right)(p) + b(p)\left(d_\varphi y(f)\right)(p) \end{array}$$

Das liefert für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ eine Abbildung

$$df\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & T^*U \\ p & \longmapsto & df_p \end{array}$$

Definition 2.4: Eine Differentialform $\omega\colon S \longrightarrow T^*$ ist ein Schnitt des Kotangentialbündels, der lokal von der Form df ist, es also eine Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von S und $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ gibt, sodass $\omega_{|U_i} = df_i$ für alle $i \in \mathcal{I}$ gilt.

3 Riemannsche Flächen und algebraische Kurven

Bis jetzt waren unsere Objekte $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten oder Riemannsche Flächen. Wir möchten nun aber in die Welt der algebraischen Kurven übergehen, um mit den Werkzeugen, die uns dort zur Verfügung stehen, neue Einsichten zu gewinnen. Dazu müssen wir erst ein paar Begrifflichkeiten wiederholen und uns daran erinnern, dass wir in der neuen Welt die alte irgendwie wieder finden.

[7] Und glauben, dass das wirklich funktioniert

Der Einfachheit halber[8] betrachten wir nur *Kurven* über $\mathbb{C}$: Sei also $F \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom[9], dann bezeichnen wir mit

$$V := \mathfrak{V}(F) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x,y) = 0\}$$

die zugehörige *affine Varietät*. Auf $\mathbb{C}^2$ erhalten wir eine Topologie, indem wir als abgeschlossene Mengen solche nehmen, die als Verschwindungsmenge von Polynomen vorkommen und nennen diese *Zariski-Topologie*. Eine Basis der Topologie erhalten wir, indem wir die offenen Mengen

$$\mathfrak{D}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) \neq 0\} = \mathbb{C}^2 \setminus \mathfrak{V}(f)$$

für $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ betrachten.

Analog zu Definition 1.4 wollen wir auch hier Funktionen betrachten, die lokal besonders schön aussehen: In der algebraischen Welt sollen die natürlich durch Polynome gegeben sein. Sei also $U \subseteq V$ offen, $p \in U$ und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann nennen wir f *regulär im Punkt* p, wenn f in einer offenen Umgebung von p als Quotient zweier Polynome[10] dargestellt werden kann. Analog heißt f *regulär auf* U, wenn f in jedem $p \in U$ regulär ist.

So erhalten wir durch die Zuordnung

$$\mathcal{O}(U) := \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist regulär}\}$$

wieder eine Garbe[11]. Die $\mathcal{O}(U)$ kann man nun ganz konkret angeben: $\mathcal{O}(V) = \mathbb{C}[X,Y]/(F)$ und $\mathcal{O}(\mathfrak{D}(f)) = \mathcal{O}(V)_{(f)}$. Ein Halm der Garbe besteht aus allen regulären Funktionskeimen, die am Punkt $p := (p_X, p_Y)$ definiert sind; das ist ein lokaler Ring mit maximalen Ideal

$$\mathfrak{m}_p := \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f(p) = 0\} = (X - p_X, Y - p_Y),$$

genauer $\mathcal{O}_p = \mathcal{O}(V)_{\mathfrak{m}_p}$. Der zugehörige Restklassenkörper ist gerade $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{C}$ und wir erinnern uns daran, dass solch[12] ein Ring genau dann *regulär* genannt wird, wenn die Dimension von $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum 1 ist. Eine Kurve nennen wir genau dann *regulär*, wenn sie in jedem Punkt regulär ist.

Das Analogon zu den meromorphen Funktionen bilden in dieser Welt die *rationalen Funktionen*. Wir nennen $f\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine *rationale Funktion*, wenn f in allen bis auf endlich vielen Punkten regulär ist und zwei solche sollen gleich sein, wenn sie auf einer offenen Menge[13] übereinstimmen. Die Gesamtheit rationaler Funktionen liefert uns einen Körper, den wir $\mathbb{C}(V)$ oder *Funktionenkörper* nennen. Es gilt

$$\mathbb{C}(V) = \mathrm{Quot}(\mathcal{O}(V)) = \mathrm{Quot}\bigl(\mathbb{C}[X,Y]\big/(F)\bigr),$$

---

[8] Natürlich geht das alles (fast) genauso für beliebige (anfangs affine, später auch quasi-projektive) Varietäten über Körpern, die, wenn man vorsichtig ist, nicht einmal algebraisch abgeschlossen sein brauchen.

[9] Dass wir so wirklich alle Kurven kriegen, liegt an der Noether-Normalisierung und dem Satz vom primitiven Element. Man kann es in [WS10, Kap. III, Lemma 4.4] nachlesen.

[10] Das Polynom im Nenner sollte anständigerweise keine Nullstellen in der Umgebung haben.

[11] Die Garbeneigenschaft rührt daher, dass Regularität eine lokale Eigenschaft ist.

[12] Allgemeiner: Der lokale Ring $(R, \mathfrak{m})$ heißt regulär, wenn $\dim R = \dim_{R/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

[13] Nicht vergessen: Die sind groß!

da im Nenner nur Polynome vorkommen, die nur endlich viele Nullstellen (in V) haben.

Da nun $\mathcal{O}_p$ immer regulär sein soll, ist $\mathfrak{m}_p$ immer ein Hauptideal, dessen Erzeuger wir mit $t_p \in \mathcal{O}_p$ bezeichnen und *Uniformisierende* nennen. Bekanntlich erhalten wir in solchen Situationen eine diskrete Bewertung, die sich auf $\mathbb{C}(V)^\times$ fortsetzen lässt und die wir mit ord_p bezeichnen.

Der Funktionenkörper eignet sich außerdem als ausgezeichnete Invariante. Da er hier von der gleichen Form wie der Körper der meromorphen Funktionen einer Riemannschen Fläche ist, können wir mit seiner Hilfe zu jeder Kurve[14] eine zugehörige Riemannsche Fläche finden und uns umgekehrt jede Riemannsche Fläche auch als eine solche Kurve vorstellen.

Aufgabe 3.1: Betrachte $F := X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$. Überlege dir, dass F irreduzibel ist und wie $\mathfrak{V}(F)$ aussehen könnte. Was passiert über $\mathbb{C}$?

Aufgabe 3.2: Zeige: $\mathcal{O}$ ist Garbe von Ringen.

Aufgabe 3.3: (a) Überlege Dir, dass die Teilraumtopologie auf V (von $\mathbb{C}^2$ mit der Zariski-Topologie herkommend), die gleiche ist, wie die von den regulären Funktionen induzierte Zariski-Topologie.

(b) Erkenne, dass die Zariski-Topologie auf unserem V gerade die koendliche Topologie ist und daher der Funktionenkörper wirklich ein Körper ist.

Aufgabe 3.4: Zeige: $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Aufgabe 3.5: (a) Erinnere Dich an die Morphismendefinition aus der differentialgeometrischen Welt. Wie sollte man hier Morphismen definieren, damit diese sinnvoll mit den Strukturgarben verträglich sind?

(b) Erinnere Dich an $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und überlege Dir, wieso rationale Funktionen Morphismen nach $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sind. Zeige außerdem: Reguläre Funktionen sind Morphismen nach $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.

Aufgabe 3.6: Sei $f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$. Bestimme $\operatorname{ord}_p f$ für jedes $p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Berechne

$$\deg \operatorname{div} f := \sum_{p \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \operatorname{ord}_p f.$$

Wieso ist diese Summe überhaupt sinnvoll?

[14] Eigentlich braucht man hier projektive Kurven. Anschaulich bedeutet das hier aber nur, einen „abschließenden“ Punkt hinzuzufügen oder aus unserer zugehörigen (eigentlich kompakten) Riemannschen Fläche einen Punkt rauszunehmen.

4 Tangentialräume

Hierfür verwenden wir [Sha74, §§II.1.2–3]. Ähnliche Überlegungen findet man z.B. auch in [WS10, Kap. III.3] oder [Har77, Kap. I.5].

Sei, wie eben, V eine Kurve über $\mathbb{C}$. Wir möchten den Tangentialraum im Punkt $p \in V$ als Menge aller Geraden, die V in p berühren, definieren. Ohne Einschänkung betrachten wir $V \ni p := (0,0)$, dann ist eine Gerade durch p gerade $L := \{ta \mid t \in \mathbb{C}\}$ (mit $p \neq a \in \mathbb{C}^2$) und wir müssen $V \cap L$ bestimmen.

Da $V = \mathfrak{V}(F)$, sind die Schnittpunkte von L mit V genau die Werte von t mit $F(ta) = 0$. Das können wir nun als Polynom in $\mathbb{C}[t]$ auffassen und als solches in Linearfaktoren zerlegen:

$$F(ta) =: c \prod (t - \alpha_i)^{l_i}.$$

Folglich schneiden sich V und L gerade in den Punkten $\alpha_i a$ mit *Vielfachheiten* l_i.

Definition 4.1: Eine Gerade L berührt V in p genau dann, wenn die Vielfachheit ihres Schnittes echt größer als 1 ist.

Nun kann man den Tangentialraum ganz konkret angeben: Da $p \in V$ ist F in (X, Y). Wir können es also als $F = L + G \in \mathbb{C}[X, Y]$ schreiben, wobei L von Grad 1 ist und G nur aus Termen von Grad mindestens 2 besteht. Insbesondere ist dann

$$F(at) = tL(a) + G(ta),$$

so dass $t^2 \mid F(at)$ genau dann, wenn $L(a) = 0$. Die Gerade durch a ist also genau dann *Tangente*, wenn $L(a) = 0$ ist.

Definition 4.2: Die Menge der Punkte auf den Geraden, die V am Punkt p berühren, nennen wir *Tangentialraum bei* p und schreiben T_p. Das ist ein affiner Raum über $\mathbb{C}$.

Diese geometrische Definition wollen wir nun durch eine rein algebraische ersetzen, damit wir den Tangentialraum unabhängig von der Einbettung unserer Varietät in den Raum definieren können. Dazu stellen wir zuerst fest, dass für ein Polynom F das L von oben gerade der Linearterm aus der Taylorentwicklung[15] bei $p := (p_1, p_2)$ ist, den wir ab jetzt

$$\mathrm{d}_p F := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i} \right) (p)(X_i - p_i) = L$$

nennen und sehen, dass d_p additiv ist und die Leibnizregel

$$\mathrm{d}_p(fg) = f(p)\mathrm{d}_p g + g(p)\mathrm{d}_p f$$

erfüllt. Wir sehen vor allem:

Bemerkung 4.3: $T_p = \mathfrak{V}(\mathrm{d}_p F)$.

[15] Hier ist $n = 2$, aber die Formel sieht komisch aus, wenn man das dann ausschreibt.

Jetzt ist die Frage, wie man F durch eine reguläre Funktion $g \in \mathcal{O}(V)$, die von einem Polynom G herkommt, ersetzt. Man stellt fest, dass gerade

$$\mathrm{d}_p g \coloneqq \mathrm{d}_p G_{|T_p}$$

das tut, denn $\mathrm{d}_p F$ verschwindet auf T_p. Das liefert eine Abbildung

$$\mathrm{d}_p \colon \mathcal{O}(V) \longrightarrow T_p^*$$

und wir nennen $\mathrm{d}_p g$ das *Differential von g bei p*. Auch das ist additiv und erfüllt die Leibnizregel.

Da $\mathrm{d}_p \alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ können wir ohne Einschränkung jedes f durch $f - f(p)$, also ein Element aus $\mathfrak{m}_p$, ersetzen und so liefert die oben gegebene Abbildung einen Isomorphismus der Vektorräume $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ und T_p^*, wodurch man eine rein algebraische Definition, die unabhängig von der Einbettung in den Raum ist, hat.

Insbesondere sieht man so auch, dass die Regularität der Kurve nun gerade bedeutet, dass der Tangentialraum an jedem Punkt eindimensional ist, was gerade der Anschauung einer glatten Kurve entspricht.

Aufgabe 4.1: (a) Sei $F \coloneqq Y^2 - X(X-1)(X-\lambda) \in \mathbb{C}[X,Y], \lambda \in \mathbb{C}$. Ist F irreduzibel? Bestimme $T_{(0,0)}$. Finde einen weiteren Punkt $p \in \mathfrak{V}(F)$ und bestimme T_p.

(b) Sei $F \coloneqq Y^2 - X^3$. Bestimme $T_{(0,0)}$ und $T_{(1,1)}$, sowie $\mathfrak{m}_{(0,0)}/\mathfrak{m}_{(0,0)}^2$ und $\mathfrak{m}_{(1,1)}/\mathfrak{m}_{(1,1)}^2$.

Aufgabe 4.2: Zeige: $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \cong T_p^*$.

Aufgabe 4.3: Zeige: d_p erfüllt die Leibnizregel.

5 Differentialformen

Wir lassen uns nun von [Sha74, §III.4] inspirieren. Dort finden sich auch viele Details, die hier fehlen.

Wir wollen, analog zum Vorgehen auf Mannigfaltigkeiten, überlegen, wie wir Funktionen, die auf unserer Kurve leben, „ableiten" können. In anderen Worten interessieren wir uns dafür, was passiert, wenn wir (für festes $f \in \mathcal{O}(V)$) die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f \colon V &\longrightarrow \bigsqcup_{p \in V} T_p^* \\ p &\longmapsto \mathrm{d}_p f \end{aligned}$$

betrachten. Sie liefert uns zu jedem Punkt p der Kurve V ein Element des Kotangentialraums T_p^*, also eine Linearform.

Um diese in den Griff zu kriegen, betrachten wir die Menge $\Phi[V]$ aller Abbildungen, die einem Punkt p eine Linearform aus T_p^* zuweisen, und stellen fest, dass sie durch komponentenweise Addition und Multiplikation zu einem $\mathcal{O}(V)$-Modul wird. Insbesondere gilt hier auch

$$\mathrm{d}f = [p \longmapsto \mathrm{d}_p f] \in \Phi[V] \text{ für jedes } f \in \mathcal{O}(V).$$

Natürlich interessieren wir uns hier nicht für alle solche Abbildungen, sondern zunächst nur für solche, die zumindest *lokal* von solch einem $\mathrm{d}f$ herkommen. Genauer:

Definition 5.1: $\omega \in \Phi[V]$ nennen wir *reguläre Differentialform auf V*, wenn jeder Punkt p eine Umgebung U hat, sodass $\omega|_U$ ein Element des von den $\mathrm{d}f$ $(f \in \mathcal{O}(U))$ erzeugten $\mathcal{O}(U)$-Untermoduls von $\Phi[U]$ ist, also (lokal) als

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{l} g_i \mathrm{d}f_i \text{ mit } g_i, f_i \in \mathcal{O}(U)$$

dargestellt werden kann.

Die Gesamtheit aller regulären Differentialformen auf V bildet einen $\mathcal{O}(V)$-Modul, den wir $\Omega[V]$ nennen.

Analog zu der Tatsache, dass wir $f \in \mathcal{O}_p$ in einer Umgebung von p immer als $f = ut_p^n$, wobei $u \in \mathcal{O}_p^\times$ und t_p die Uniformisierende in p ist, schreiben können, haben wir:

Satz 1: *Jeder reguläre Punkt p auf V besitzt eine affine Umgebung U, so dass $\Omega[U] = \mathcal{O}(U)\mathrm{d}t_p$.*

Beweis: Übungsaufgabe :)

Die Idee ist, dass man sich zuerst überlegt, dass, für rationales G, $\partial G/\partial X_i$ regulär ist und man dann mit der Tatsache, dass F auf V verschwindet und Aufgabe 5.1 zeigen kann, dass man $\mathrm{d}f$ (für $f \in \mathcal{O}_p$) immer als $g\mathrm{d}t_p$ mit $g \in \mathcal{O}_p$ darstellen kann. $\square$

Bemerkung 5.2: Man kann den Differentialmodul auch rein algebraisch beschreiben:

Wenn V regulär ist, dann ist $\Omega[V]$ *der* Differentialmodul $\Omega_{\mathcal{O}(V)/\mathbb{C}}$, das heißt: Für jeden $\mathcal{O}(V)$-Modul Ω' mit einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $\mathrm{d}'\colon \mathcal{O}(U) \longrightarrow \Omega'$, die additiv ist und die Leibnizregel erfüllt, existiert genau ein $\mathcal{O}(V)$-Modulhomomorphismus $\varphi\colon \Omega_{\mathcal{O}(V)/\mathbb{C}} \longrightarrow \Omega'$. Als Bild:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(V) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dr, "\mathrm{d}'"'] & \Omega_{\mathcal{O}(V)/\mathbb{C}} \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\
 & \Omega'
\end{tikzcd}$$

Das kann man mit Satz 1 einsehen, da $\Omega[V]$ lokal von $\mathrm{d}t_p$ erzeugt wird.

Wie zum Beispiel an Aufgabe 5.6 deutlich wird, ist Regularität oft eine sehr starke Bedingung an eine Differentialform. Ähnlich wie bei den regulären Funktionen wollen wir also eine Abschwächung zulassen:

Definition 5.3: Eine *rationale Differentialform* ist ein $\omega \in \Omega[U]$, wobei $U \subseteq V$ mit $V \setminus U$ endlich. Wir möchten zwei solche wieder miteinander identifizieren, wenn sie auf einer offenen Menge übereinstimmen.

Die Gesamtheit solcher nennen wir $\Omega(V)$.

Satz 2: $\Omega(V)$ *ist ein eindimensionaler* $\mathbb{C}(V)$*-Vektorraum.*

Beweis: Nach Konstruktion müsste eigentlich klar sein, dass sich $\Omega(V)$ von $\mathrm{d}\overline{X}$ und $\mathrm{d}\overline{Y}$ erzeugen lässt und mit Hilfe von Bemerkung 4.3 und Aufgabe 5.1 müsste man eigentlich auch einsehen können, dass zwei Erzeuger zu viel sind. Siehe auch [WS10, IV.4.1]. □

Da ω lokal die Form $g\mathrm{d}t_p$ hat, macht es mit Aufgabe 5.5 und Aufgabe 5.1 Sinn von $\mathrm{ord}_p\,\omega := \mathrm{ord}_p\,g$ zu sprechen.

Aufgabe 5.1: Zeige, dass für beliebige Polynome $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_m]$ und $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(V)$

$$\mathrm{d}(F(f_1, \ldots, f_m)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial X_i}(f_1, \ldots, f_m)\mathrm{d}f_i.$$

Aufgabe 5.2: Beweise Satz 1.

Aufgabe 5.3: Mache Dir klar, wieso $\Omega[V]$ wirklich die UAE von $\Omega_{\mathcal{O}(V)/\mathbb{C}}$ erfüllt.

Aufgabe 5.4: Überlege Dir, dass Definition 5.3 sinnvoll ist.

Aufgabe 5.5: Zeige, dass $\mathrm{ord}_p\,\omega$ wirklich wohldefiniert ist.

Aufgabe 5.6: Berechne $\Omega[\mathbb{A}^n]$, $\Omega[\mathbb{P}^1]$ und $\Omega(\mathbb{P}^1)$.

6 Der Satz von Riemann-Roch

Nun, da wir Differentialformen kennen, können wir den Satz von Riemann-Roch verstehen und anwenden[16]. Dazu brauchen wir aber noch ein bisschen Vokabular.

DEFINITION 6.1: Sei V eine projektive reguläre Kurve.

(a) Wir betrachten die freie abelsche Gruppe über V. Diese nennen wir *Divisorengruppe*. Ein Element aus ihr nennen wir *Divisor* und können es als formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$$

für $n_i \in \mathbb{Z}$ und $P_i \in V$ auffassen. Dabei nennen wir $\deg D := \sum n_i$ den *Grad* des Divisors.

Wir nennen D *effektiv*, wenn $n_i \geq 0$ für alle i.

(b) Für $f \in \mathbb{C}(V)^\times$ erhalten wir durch

$$\mathrm{div}\, f := \sum_{P \in V} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P$$

einen Divisor. Divisoren dieser Form nennen wir *Hauptdivisoren.* Genauso erhalten wir für $\omega \in \Omega(V)$ einen Divisor $\mathrm{div}\,\omega$. Diesen nennen wir *kanonischen Divisor.*

[16] Beweisen ist schwieriger. Für Riemannsche Flächen geschieht dies zum Beispiel in [For77] oder [Mir95], für algebraische Kurven zum Beispiel in [Har77].

(c) Zu einem Divisor D können wir uns die rationalen Funktionen anschauen, deren Null- bzw. Polstellenordnungen von D beschränkt werden. Wir schreiben

$$\mathcal{L}(D) \coloneqq \{f \in \mathbb{C}(V)^\times \mid D + \operatorname{div} f \text{ ist effektiv}\} \cup \{0\}.$$

Das ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, seine Dimension bezeichnen wir mit $\mathfrak{l}(D)$.

Satz 3 (Riemann-Roch)**:** *Sei K ein kanonischer Divisor. Dann gibt es eine natürliche Zahl $\mathfrak{g}$, so dass für jeden Divisor D*

$$\mathfrak{l}(D) - \mathfrak{l}(K - D) = \deg D - \mathfrak{g} + 1$$

gilt. Wir nennen $\mathfrak{g}$ das Geschlecht *unserer Kurve.*

Aufgabe 6.1: Erkenne, dass $\operatorname{div} f$ wirklich ein Divisor ist.

Aufgabe 6.2: Zeige: $\mathfrak{l}(K) = \mathfrak{g}$ und $\deg K = 2\mathfrak{g} - 2$.

Aufgabe 6.3: Berechne $\mathfrak{g}(\mathbb{P}^1)$.

Aufgabe 6.4: Sei E eine reguläre projektive Kurve von Geschlecht 1. Zeige: Dann kann E durch eine Weierstraß-Gleichung beschrieben werden.

Literatur

[For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen*. Berlin: Springer, 1977.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. New York: Springer, 1977.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Graduate Studies in Mathematics 5. American Mathematical Society, 1995.

[Sha74] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 213. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

[Sil86] Joseph H. Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate Texts in Mathematics 106. New York: Springer-Verlag, 1986.

[Spi65] Michael Spivak. *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. Mathematics monograph series. New York: Benjamin, 1965.

[WS10] Gabriela Weitze-Schmithüsen. „Algebraische Geometrie I“. Vorlesungsskript. 2010.