Von holomorphen Differentialen auf Riemannschen Flächen zu Translationsflächen

Gabriela Weitze-Schmithüsen

November 2011

Der Satz von Riemann-Roch für geschlossene Riemannsche Flächen

In Felix Vortrag gestern haben wir allgemeine C^∞-Differentialformen auf einer Riemannschen Fläche kennengelernt und gesehen, dass sie eine Garbe bilden. In Jonathans Vortrags haben wir uns dann regulären und rationalen Differentialformen auf algebraischen Kurven gewidmet und zum Schluss den Satz von Riemann-Roch für projektive algebraische Kurven kennengelernt bzw. uns daran erinnert. Heute wollen wir deren Analoga auf Riemannschen Flächen studieren, nämlich holomorphe und meromorphe Differentiale. Wir werden sehen, dass wir die Definitionen fast alle direkt übertragen können. Der Satz von Riemann-Roch gilt dann entsprechend für Riemannsche Flächen, womit wir uns in diesem Abschnitt und in den anschließenden Übungsaufgaben befassen möchten. Schöne Einführungen dazu findet man zum Beispiel in [1, Kap. 16, Kap. 17] und in [3, Kap. V, Kap. VI].

Zur Notation: Kartenabbildungen gehen in diesem Abschnitt (weil dadurch an manchen Stellen die Notation einfacher wird) immer von der Fläche X in die Ebene $\mathbb{C}$.

Zunächst sollten wir uns daran erinnern, dass die Kategorie der komplexen projektiven Kurven mit Morphismen von Varietäten und die Kategorie der geschlossenen Riemannschen Flächen mit nicht-konstanten holomorphen Abbildungen äquivalent sind. Nun wollen wir zu den Objekten, mit denen wir gestern bei den projektiven algebraischen Kurven gearbeitet haben, die jeweiligen Analoga in der Welt der Riemannschen Flächen betrachten.

Erinnerung 1. *Sei C eine komplexe projektive Kurve und X die zugehörige Riemannsche Fläche.*

i) Das Pendant zur Garbe der regulären Funktionen auf C ist auf X die Garbe $\mathcal{H}$ der holomorphen Funktionen. Das Pendant zur Garbe der rationalen

Funktionen auf C ist die Garbe $\mathcal{M}$ der meromorphen Funktionen auf X. Achtung: Die meromorphen und die rationalen Funktionen auf ganz X und auf ganz C stimmen zwar überein, für echte offene Teilmengen U stimmt das aber nicht mehr und wir betrachten sie nur als Analoga zueinander.

ii) *Entsprechend wie für rationale Funktionen hat man für eine meromorphe Funktionen f in jedem Punkt P von X eine* Ordnung $\mathrm{ord}_P(f)$. *Erinnern wir uns daran, wie diese für meromorphe Funktionen definiert ist: Wähle eine Kartenabbildung $\varphi : X \supseteq U_\varphi \to \mathbb{C}$ mit Zentrum P (d.h. $P \in U_\varphi$ und $\varphi(P) = 0$). Dann ist $f \circ \varphi^{-1}$ eine meromorphe Funktion und lässt sich also um $0 = \varphi(P)$ in eine Laurent-Reihe $\sum_{n\geq k} a_n z^n$ entwickeln. Œ sei $a_k \neq 0$. Dann ist* $\mathrm{ord}_P(f) = k$. *Dass dies unabhängig von der gewählten Karte ist, kann man recht leicht nachrechnen.*

iii) *Ganz genau wie für algebraische Kurven ordnen wir einem $f \in \mathcal{M}(X)$ den Divisor* $\mathrm{div}(f) = \sum_{P\in X} \mathrm{ord}_P(f) \cdot P$ *zu und definieren den Riemann-Roch-Raum $L(D)$ zu einem Divisor D durch:*

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) |\ \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$$

Bei der Definition von Differentialen funktioniert es ähnlich wie bei Funktionen: Die holomorphen Differentiale definieren sich genauso wie die regulären Differentiale (vgl. Def. 5.1 und Satz 1 in Jonathans Vortrag). Aber bei den meromorphen Differentialen müssen wir erzwingen, dass sie in den Punkten, in denen sie nicht definiert sind, Polstellen und keine wesentlichen Singularitäten haben (vgl. mit Def. 5.3 in Jonathans Vortrag).

Definition 2. Sei U eine offene Teilmenge von X und

$$\omega : U \to \dot{\bigcup_{p\in U}} T_p^*(U) \text{ eine Abbildung mit } \omega(p) \in T_p^*(U).$$

Das bedeutet mit der Notation aus Jonathans Vortrag genau, dass $\omega \in \Phi[U]$ ist. Die Elemente aus $\Phi[U]$ heißen *Differentiale.*

i) ω heißt *holomorphes Differential*, wenn für jede Karte (U_φ, φ) in U gilt: $\omega|_{U_\varphi} = f \cdot d\varphi$ für ein $f \in \mathcal{H}(U_\varphi)$. Die Zuordnung

$$U \mapsto \Omega^{\mathrm{hol}}(U) := \{\omega \in \Phi[U] |\ \omega \text{ ist holomorphes Differential auf } U\}$$

ist eine Garbe, die *Garbe der holomorphen Differentiale.*

ii) Sei $p \in X$. Ist für eine Karte U_φ mit Zentrum p das Differential ω auf $U_\varphi \backslash \{p\}$ ein holomorphes Differential, so lässt es sich also darstellen als $\omega = f \cdot d\varphi$ mit $f \in \mathcal{H}(U\backslash\{p\})$. ω heißt *meromorph in p*, falls f meromorph in p ist und wir definieren die *Ordnung* $\mathrm{ord}_P(\omega)$ von ω in P durch: $\mathrm{ord}_P(\omega) := \mathrm{ord}_P(f)$. Der Punkt P ist eine *Polstelle von* ω, wenn er eine Polstelle von f ist, also wenn $\mathrm{ord}_P(\omega) < 0$ gilt. Dass dies alles unabhängig von der gewählten Karte ist, muss wieder nachgerechnet werden.

iii) ω heißt *meromorphes Differential*, wenn es ein $U' \subseteq U$ gibt mit:

- $U \backslash U'$ besteht nur aus isolierten Punkten.
- ω hat in jedem Punkt $p \in U \backslash U'$ einen Pol.

Die Zuordnung

$$U \mapsto \Omega^{\mathrm{mer}}(U) := \{\omega \in \Phi[U] |\, \omega \text{ ist meromorphes Differential auf } U\}$$

ist eine Garbe, die *Garbe* Ω^{mer} *der meromorphen Differentiale.*

iv) Schließlich definieren wir wörtlich wie bei algebraischen Kurven den *kanonischen Divisor* K zu ω als

$$K := \sum_{P \in X} \mathrm{ord}_P(\omega) \cdot P$$

Wie für algebraische Kurven hat der Vektorraum $\Omega^{\mathrm{mer}}(X)$ als Vektorraum über $\mathcal{M}(X)$ Dimension 1 und man kann daraus folgern, dass je zwei kanonische Divisoren K_1 und K_2 *linear äquivalent* sind, das heißt, es gibt eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $K_1 = K_2 + \mathrm{div}(f)$.

Nun haben wir alle Zutaten zusammen, um den Satz von Riemann-Roch für Riemannsche Flächen zu formulieren. Dank der Äquivalenz der Kategorien gilt diese Aussage dann genauso.

Satz 1 (Satz von Riemann-Roch für Riemannsche Flächen)**.**[1]
Sei X eine geschlossene Riemannsche Fläche von Geschlecht g und K ein kanonischer Divisor auf X. Dann gilt für die Dimensionen der Riemann-Roch-Räume $L(D)$ und $L(K - D)$ als Vektorräume über $\mathbb{C}$:

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) - \dim_{\mathbb{C}} L(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Dabei ist wie immer der Grad eines Divisors $D = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot P_i$ *die ganze Zahl* $\deg(D) := \sum_{i=1}^{k} c_i$.

Die folgenden Aufgaben sollen aufzeigen, warum der Satz von Riemann-Roch sehr nützlich ist. Wir wollen eine Idee bekommen, wie man ihn verwenden kann, um Riemannsche Flächen von Geschlecht 1 zu klassifizieren.

[1] siehe z.B. [3, Thm 3.11], [1, Satz 16.9 u. Kap. 17], [2, Thm IV.1.3]

Aufgaben zum Satz von Riemann-Roch und Kurven von Geschlecht 1

Aufgabe 1: Sei $\omega \in \Omega^{\text{hol}}(X)$ ein holomorphes Differential und $f \in \mathcal{M}(X)$ eine meromorphe Funktion.

a) Zeige: $f\omega$ holomorph $\Leftrightarrow \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega) \geq 0$.

b) Was ist $\dim_{\mathbb{C}}(\Omega^{\text{hol}}(X))$?

Aufgabe 2: Bestimme den kanonischen Divisor für das Differential $\mathrm{d}z$ auf der Riemannschen Zahlenkugel

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Erinnerung: In ∞ ist eine Karte wie folgt definiert:

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} \text{ für } z \neq \infty \\ 0 \text{ für } z = \infty \end{cases} \end{cases}$$

Aufgabe 3:

a) (Achtung: ein bisschen langwierig)
Bestimme einen kanonischen Divisor für die Kurve X gegeben durch $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ und zeige, dass er Grad 0 hat.

b) Was ist das Geschlecht der Riemannschen Fläche, die durch die Gleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ bestimmt ist?

Hinweis für a): Die Kurve X muss kompaktifiziert werden. Dazu wird ein Punkt ∞ hinzugenommen, zusammen mit der Kartenabbildung:

$$\varphi : \begin{cases} X \supset U \to \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{y} \text{ für } y \neq 0 \\ 0 \text{ für } (x,y) = \infty \end{cases} \end{cases}$$

Aufgabe 4: Wir wollen im Folgenden zeigen, dass jede Riemannsche Fläche X von Geschlecht 1 durch eine kubische Gleichung in zwei Variablen gegeben ist.

a) Sei $P \in X$ und $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$. Zeige, dass für den Riemann-Roch-Raum

$$L(n \cdot P) = \{f \in \mathcal{M}(X) | \operatorname{div}(f) + n \cdot P \geq 0\}$$

gilt: $\dim_{\mathbb{C}} L(n \cdot P) = n$.

Hinweis: RR

b) Wähle eine Basis $\{1, x\}$ von $L(2 \cdot P)$ und eine Basis $\{1, x, y\}$ von $L(3 \cdot P)$. Zeige, dass $1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3$ linear abhängig (über $\mathbb{C}$) sind.

c) Dann leistet die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{C}^2, p \mapsto (x(p), y(p))$ das Gewünschte.

Bemerkung: Von hier ist es nicht mehr weit (nur noch etwas Rechnerei), zu zeigen, dass jede Riemannsche Fläche von Geschlecht 1 durch eine Legendregleichung $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ *bestimmt ist. Die Zuordnung ist bis auf den Faktor 6 eindeutig.*

Aufgabe 5: Bestimme möglichst viele Automorphismen der Riemannschen Fläche, die durch $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ gegeben ist. Wieviele gibt es?

Translationsflächen – eine kleine Einführung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie man von einem meromorphen Differential auf einer Riemannschen Fläche zu einem Translationsatlas kommt. Hierzu führen wir zunächst ein, wie Wegintegrale auf Riemannschen Flächen definiert sind, mit deren Hilfe wir dann den Translationsatlas angeben können. Dieser definiert darüber hinaus in natürlicher Weise eine Metrik auf X. Als Grundlage dient [4, Kap. II].

Wir beginnen damit, uns zunächst an Wegintegrale in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ zu erinnern.

Erinnerung 3. *Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg (d.h. stetig und stückweise differenzierbar), U offen in $\mathbb{C}$, so dass γ in U liegt, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.*

i) *Das* Wegintegral von *f längs γ ist definiert durch:*

$$\int_\gamma f \; dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

ii) *Falls U einfach zusammenhängend ist, f auf ganz U holomorph ist und γ_1, γ_2 zwei Integrationswege in U mit gemeinsamen Anfangspunkt $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und gemeinsamen Endpunkt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ sind, dann gilt:*

$$\int_{\gamma_1} f \; dz = \int_{\gamma_2} f \; dz$$

Nun möchten wir gerne statt in $\mathbb{C}$ längs Wegen auf Riemannschen Flächen integrieren. Wie üblich können wir mit Hilfe von Karten die Situation nach $\mathbb{C}$ transportieren. Allerdings hängt für eine Karte (U_φ, φ) und eine Funktion $f : U_\varphi \to \mathbb{C}$ das Wegintegral von $f \circ \varphi$ längs des Bildweges $\varphi(\gamma)$ von der gewählten Karte ab. Deshalb sollten wir nicht Funktionen, sondern Differentiale integrieren! Die Kartenwechseltransformationsregeln für Differentiale sorgen genau dafür, dass das Integral wegunabhängig ist. Im Folgenden sei X immer eine Riemannsche Fläche und ω ein meromorphes Differential auf X. Für eine offene Teilmenge U von X bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(U)$ die meromorphen Funktionen auf U.

Erinnerung 4. *Sei (U_φ, φ) eine Karte auf X und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.*

i)

$$df = \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial z} \circ \varphi\right) \cdot d\varphi$$

ii) Insbesondere gilt für eine weitere Karte (U_ψ, ψ) mit der Übergangsfunktion $\alpha := \psi \circ \varphi^{-1}$:

$$d\psi = (\alpha' \circ \varphi) \cdot d\varphi \tag{1}$$

Für die Grundidee, wie man nun Wegintegrale auf der Riemannschen Fläche definieren sollte, wollen wir zunächst annehmen, dass wir eine Karte (U_ψ, ψ) haben, sodass der Weg γ ganz in U_ψ liegt und sich das meromorphe Differential ω als $\omega = h \cdot d\psi$ schreiben lässt. Nun definieren wir das Integral tatsächlich so, dass wir Weg und Differential jeweils mit der Karte nach $\mathbb{C}$ transportieren und dort das Wegintegral bilden.

Definition 5 (*lokales Wegintegral*)**.** Sei (U_ψ, ψ) Karte auf X, $\omega = g \cdot d\psi$ mit $g \in \mathcal{M}(U_\psi)$ und $\gamma : [0,1] \to U_\psi$ ein Weg in U_ψ.

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma g \cdot d\psi := \int_{\psi(\gamma)} g \circ \psi^{-1} \, dz$$

Nun benötigen wir natürlich, dass die Definition unabhängig von der gewählten Karte ist. Dies leistet genau die Transformationsregel (1) für Differentiale.

Bemerkung 6. *Die Definition des Wegintegrals in Definition 5 ist unabhängig von der gewählten Karte.*

Beweis. Seien wie oben (U_φ, φ) und (U_ψ, ψ) zwei Karten und $\gamma : [0,1] \to U_\varphi \cap U_\psi$ ein Weg mit Bild im Schnitt. Sei weiter $\omega = g \cdot d\psi$. Nach (1) gilt, dass $\omega = f \cdot d\varphi$ mit $f = g \cdot (\alpha' \circ \varphi)$, wobei $\alpha = \psi \circ \varphi^{-1}$ die Übergangsfunktion ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_\gamma f \cdot d\varphi &\overset{\text{Def.}}{=} \textstyle\int_{\varphi(\gamma)} f \circ \varphi^{-1} \, dz = \int_{\varphi(\gamma)} (g \cdot (\alpha' \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \, dz \\
&= \textstyle\int_{\varphi(\gamma)} (g \circ \varphi^{-1}) \cdot \alpha' \, dz = \int_{\varphi(\gamma)} (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}) \cdot \alpha' \, dz \\
&= \textstyle\int_{\varphi(\gamma)} (g \circ \psi^{-1} \circ \alpha) \cdot \alpha' \, dz \\
&\overset{\text{Substitution.}}{=} \textstyle\int_{\alpha \circ \varphi(\gamma)} g \circ \psi^{-1} \, dz = \int_{\psi(\gamma)} g \cdot d\psi
\end{aligned}$$

□

Definition 7. Das lokale Integral aus Definition 5 definiert ein globales Wegintegral auf X wie folgt. Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein Integrationsweg und ω ein meromorphes Differential auf X. Sei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$, so dass $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils in einer Karte (U_i, φ_i) liegt, dann sei

$$\int_\gamma \omega := \int_{\gamma_1} \omega + \ldots + \int_{\gamma_n} \omega.$$

Hierbei sind die $\int_{\gamma_i} \omega$ die lokalen Wegintegrale aus Definition 5.

Das in Definition 7 definierte Wegintegral ist nach Bemerkung 6 wohldefiniert und nicht abhängig von den gewählten Karten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Es erfüllt die gewohnten Regeln für ein Integral, zum Beispiel gelten die in der folgenden Bemerkung aufgeführten Eigenschaften.

Bemerkung 8. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ zwei Wege und $\gamma : [0,1] \to X$ das Kompositum der beiden Wege. Sei γ^- der inverse Weg zu γ, also $\forall t \in [0,1] : \gamma^-(t) = \gamma(1-t)$. Seien ω, ω_1, ω_2 meromorphe Differentiale auf X und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

i) $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$

ii) $\int_{\gamma^-} \omega = -\int_\gamma \omega$

iii) $\int_\gamma (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \cdot \int_\gamma \omega_1 + \lambda_2 \cdot \int_\gamma \omega_2$

Beweis. Die Aussagen folgen aus den entsprechenden Aussagen für Wegintegrale in $\mathbb{C}$. □

Im nächsten Schritt definiert uns nun ein meromorphes Differential ω einen Translationsatlas, eine Metrik und für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ sogenannte Trajektorien in Richtung v.

Sei $S := \{P \in X | \operatorname{ord}_P(\omega) \neq 0\}$ die Menge der *Singularitäten* von ω. S ist also eine endliche Menge von Punkten aus X. Sei weiter $X^* = X - S$. Wir betrachten nun Tripel (U_φ, φ, P) mit

- (U_φ, φ) ist Karte.
- U_φ liegt ganz in X^* und ist einfach zusammenhängend.
- $P \in U_\varphi$ mit $\varphi(P) = 0$.

Für jedes solche Tripel definieren wir eine neue spezielle Kartenabbildung auf X^* in einer Umgebung von P wie im Folgenden beschrieben wird.

Bemerkung 9. *Definiere für jedes solche Tripel (U_φ, φ, P) die Abbildung $\mu_{(U_\varphi,P)}$ nach $\mathbb{C}$ durch:*

$$\mu_{(U_\varphi,P)} : U_\varphi \to \mathbb{C}, \quad Q \mapsto \int_{\gamma_Q} \omega$$

Hierbei sei γ_Q ein beliebiger Weg in U_φ von P nach Q. Die Abbildung ist nach Erinnerung 3 ii) wohldefiniert und unabhängig vom gewählten Weg γ_Q. Außerdem gilt: In einer Umgebung $\hat{U}_\varphi$ von P ist $\mu_{(U_\varphi,P)}$ eine holomorphe Kartenabbildung, das heißt biholomorph auf ihr Bild.

Beweis. Schreibe im Folgenden $\mu := \mu_{(U_\varphi, P)}$. Nach Definition von meromorphen Differentialen können wir $\omega = f \cdot d\varphi$ mit meromorphem f schreiben. Da $P \notin S$, ist f sogar holomorph in P und $f(P) \neq 0$. Nach Definition gilt:

$$\mu(Q) = \int_{\gamma_Q} \omega = \int_{\gamma_Q} f \cdot d\varphi = \int_{\gamma_Q} f \circ \varphi^{-1} \, dz.$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{f} := f \circ \varphi^{-1}$ holomorph in $0 = \varphi(P)$. Somit existiert auf einer Umgebung von 0 eine Stammfunktion F von $\tilde{f}$. Wir wählen F so, dass $F(0) = 0$ ist, dann gilt $\mu(Q) = F(\varphi(Q))$. Außerdem ist $F'(0) = \tilde{f}(0) = f(P) \neq 0$. Folglich ist F auf einer Umgebung von 0 biholomorph auf sein Bild. Wähle nun $\hat{U}_\varphi$ als Urbild dieser Umgebung unter φ. □

Wir werden gleich sehen, dass die in Bemerkung 9 definierten holomorphen Karten auf X^* besonders schön sind in dem Sinn, dass die Übergangsfunktionen immer Translationen sind. Wir erinnern uns an die folgende Definition.

Definition 10. Ein Atlas auf einer Riemannschen Fläche heißt *Translationsatlas*, wenn alle Kartenwechselabbildungen Translationen sind. Ein maximaler Translationsatlas heißt *Translationsstruktur*. Eine Fläche mit Translationsstruktur wird auch als *Translationsfläche* bezeichnet.

Ein erstes Beispiel für eine Translationsfläche ist der Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$. Durch lokales Umkehren der Projektion $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i)$ erhält man die Kartenabbildungen. Die Kartenwechselabbildungen sind dann von der Form $z \mapsto z + \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$. Ganz viele weitere Beispiele erhält man, indem man Polygone in der euklidischen Ebene entlang von Kanten, die gleichlang und parallel sind, verklebt, sodass eine geschlossene Fläche X entsteht. Die Struktur der euklidischen Ebene liftet sich zu einer Translationsstruktur auf der punktierten Fläche $X^* = X \backslash \{\text{Eckpunkte der Polygone}\}$.

Kehren wir nun zurück zu unser gegebenen Fläche X^* mit dem meromorphen Differential ω.

Definition und Bemerkung 11. Die Familie $\{\mu_{(U_\varphi, P)}|_{\hat{U}_\varphi}\}$ aus Bemerkung 9 bildet einen Translationsatlas auf X^*. Den zugehörigen maximalen Translationsatlas nennen wir die *durch ω definierte Translationsstruktur auf X^**.

Beweis. Übungsaufgabe 6. □

Schließlich erhalten wir durch unseren Translationsatlas eine Metrik auf

$$\overline{X^*} = X \backslash \{\text{Polstellen}\},$$

indem wir die euklidische Metrik von $\mathbb{C}$ via der Karten zurückziehen und dann vervollständigen. Mithilfe des Werkzeugs Wegintegral kann man dazu äquivalent die Metrik auch wie im Folgenden beschrieben definieren. Dazu erinnern wir uns wiederum zunächst daran, wie Weglängen in $\mathbb{C}$ berechnet werden, und ziehen dies mit Hilfe von Kartenabbildungen zunächst lokal auf die Riemannsche Fläche zurück. Hierbei müssen wir aufpassen, dass wir die „richtige“ Definition der Länge in $\mathbb{C}$ verallgemeinern.

Erinnerung 12. *Sei $\gamma : [0,1] \to X$ ein rektifizierbarer Weg.*

i) Dann gilt für die Länge $l(\gamma)$ von γ: $l(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| \,\mathrm{dt}$.

ii) Notiere für eine Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$: $\int_\gamma h\,|dz| := \int_0^1 h(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\,dt$. Dann gilt also: $l(\gamma) = \int_\gamma |dz|$.

Die zweite Beschreibung von $l(\gamma)$ können wir nun auf Riemannsche Flächen übertragen. Hierzu gehen wir genauso vor wie bei der Definition des Wegintegrals.

Definition und Bemerkung 13. Sei $\gamma : [0,1] \to \overline{X^*}$ ein differenzierbarer Weg.

i) Zunächst liege das Bild von γ ganz in einer Karte $U_\varphi \subseteq \overline{X^*}$ und $\varphi \circ \gamma$ sei rektifizierbar. Weiter sei $\omega = f \cdot d\varphi$ gegeben mit holomorphem f (eventuell muss U_φ dazu verkleinert werden). Dann definiere:

$$l(\gamma) := \int_\gamma |f|\,|dz| := \int_{[0,1]} |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

ii) Ähnlich wie in Bemerkung 6 rechnet man nach, dass $l(\gamma)$ nicht von der gewählten Karte abhängt.

iii) Sei nun wiederum $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ eine Zerlegung des Intervalls $[0,1]$, so dass $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ jeweils in einer Karte (U_i, φ_i) liegt und $\varphi_i(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]})$ rektifizierbar ist, dann sei:

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[0,1]}) + \ldots + l(\gamma|_{[n-1,n]}).$$

Wiederum hängt $l(\gamma)$ nach ii) natürlich nicht von den gewählten Karten ab.

iv) Für x_1, x_2 in X ist $d(x_1, x_2) = \inf_\gamma l(\gamma)$, wobei γ alle rektifizierbaren Wege von x_1 nach x_2 durchläuft.

v) Der Weg γ heißt *Geodätische*, wenn er lokal die Länge minimalisiert, d.h. wenn jedes $t \in [0,1]$ eine abgeschlossene Umgebung $[t_1, t_2]$ besitzt, so dass $\gamma|_{[t_1,t_2]}$ die kürzeste Verbindung zwischen $\gamma(t_1)$ und $\gamma(t_2)$ ist.

Schließlich macht es für Translationsflächen Sinn von geradlinigen Wegen und Richtungen zu sprechen, da diese Eigenschaften unter Kartenwechsel erhalten bleiben.

Definition 14. Sei $\gamma : I \to X$ (mit $I = [0, a], a \in \mathbb{R}_+$, oder $I = \mathbb{R}_{\geq 0}$) eine glatte Kurve.

i) γ heißt *geradliniger Bogen* bezüglich ω, wenn $\arg \int_{\gamma|_{[0,t)}} \omega = \theta$ unabhängig von t ist.

ii) Ein geradliniger Bogen γ heißt *horizontaler Bogen*, wenn $\theta = 0$ und *vertikaler Bogen*, wenn $\theta = \pi$ ist.

iii) Eine *horizontale Trajektorie* bzw. *vertikale Trajektorie* ist ein maximaler horizontaler bzw. vertikaler Bogen.

Um die von ω definierte Translationsstruktur auf einer Fläche zu verstehen, kann man nun zum Beispiel alle horizontalen Trajektorien betrachten und „sieht“ auf diese Weise das meromorphe Differential.

Aufgaben zu Translationsflächen

Für die folgenden Aufgaben sei X immer eine geschlossene Riemannsche Fläche, ω ein meromorphes Differential auf X und S die Menge der Singularitäten des Differentials ω.

Aufgabe 6: Es sei μ der Atlas auf $X - S$, der von ω lokal durch Wegintegrale definiert wird. Zeige, dass μ ein Translationsatlas ist. Zeige also: Sind $(V_1, \mu_1 : V_1 \to \mathbb{C})$ und $(V, \mu_2 : V_2 \to \mathbb{C})$ zwei Karten aus μ, dann gilt:

$$\mu_2 \circ \mu_1^{-1} : \mu_1(V_1 \cap V_2) \to \mu_2(U \cap V)$$

ist eine Translation.

Aufgabe 7: Erinnerung: Eine glatte Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ heißt *geradlinig*, wenn

$$\arg \int_{\gamma|_{[0,t]}} \omega \text{ konstant (d.h. unabhängig von } t\text{) ist.}$$

Wahr oder falsch?

- γ ist geradlinig $\Rightarrow$ γ enthält keine singulären Punkte.
- γ ist geradlinig $\Leftrightarrow$ γ ist geodätische Verbindung zwischen den beiden Punkten $\gamma(0)$ und $\gamma(1)$.

Aufgabe 8: Es sei X nun $\mathbb{C}$ (und damit ausnahmsweise nicht kompakt). Bestimme für die folgenden Differentiale ihre horizontalen Trajektorien.

i) $\omega = dz$

ii) $\omega = zdz$

iii) $\omega = z^n dz$

iv) $\omega = \frac{1}{z} dz$

Aufgabe 9: Bestimme in der vorangegangenen Aufgabe in iv) für alle geschlossenen horizontalen Trajektorien ihre Länge. Beschreibe den durch ω definierten Translationsatlas μ.

Aufgabe 10: Beschreibe die Translationsfläche, die durch $\omega = \frac{1}{z} dz$ auf dem Kreisring $Z_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} |\ r < |z| < R\}$ definiert wird.

Aufgabe 11: Sei nun X wieder eine Riemannsche Fläche mit einem meromorphen Differential ω. Wie verändert sich der Translationsatlas μ, wenn ω durch $c \cdot \omega$ ersetzt wird für ein $c \in \mathbb{C}$?

Aufgabe 12: $\omega \in \Omega^{\text{mer}}(X)$ heiße *Strebel-Differential*, wenn alle horizontalen Trajektorien geschlossen oder Sattelverbindungen sind.

Für Strebeldifferentiale können wir wie folgt einen Graphen G definieren, den wir *Nullstellengraph* nennen: Die Ecken von G sind die Nullstellen von ω. Die Kanten sind die horizontalen Sattelverbindungen.

i) Wieviele mögliche Nullstellengraphen gibt es für Flächen X von Geschlecht 2 und holomorphes ω?

ii) Wieviele Nullstellengraphen gibt es für $g = 2$ und $\omega \in V$ (definiert wie in (2)) in der folgenden Aufgabe?

Aufgabe 13: Seien $P_1, \ldots, P_s$ Punkte auf X und

$$V := \left\{ \omega \in \Omega^{\mathrm{mer}}(X) | \begin{array}{l} \omega \text{ ist holomorph auf } X - \{P_1, \ldots, P_s\} \\ \text{und hat in den } P_i \text{ Polstellenordnung} \leq 1 \end{array} \right\} \tag{2}$$

Welche Dimension hat der $\mathbb{C}$-Vektorraum V?

Literatur

[1] Otto Forster. *Riemannsche Flächen.* Heidelberger Taschenbücher. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1977.

[3] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, 1995.

[4] Kurt Strebel. *Quadratic Differentials.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Band 5. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1984.