Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dipl.-Math. oec. Anja Randecker

Seminar im Wintersemester 2011/2012 – Modulprobleme

1. **Feine und grobe Modulräume** *(Felix Wellen)*
   Literatur: [HM98] Kapitel 1A, [Sil86] Kapitel III.1 (insbes. Prop.1.4) und Kapitel III.3 (insbes. Prop.3.1)

   Modulprobleme: Familien, Modulfunktoren und die Frage nach ihrer Darstellbarkeit, grober und feiner Modulraum. Speziell die Modulfunktoren $\mathcal{M}_g$, $\mathcal{M}_{g,n}$ und $\mathcal{H}ilb_r^{p(t)}$. Als Beispiele die groben Modulräume $\mathrm{M}_{0,n}$ für $n \leq 3$ und $\mathrm{M}_{1,1}$: $\mathrm{M}_{0,n}$ mit $n \leq 3$ besteht aus einem Punkt. $\mathrm{M}_{1,1}$ ist die affine Gerade $\mathbb{A}^1$. Hierzu (optional): Elliptische Kurven, Weierstraßform; die j-Invariante klassifiziert elliptische Kurven (es genügt, alles über $\mathbb{C}$ zu machen).

2. **Algebraische Kurven und Riemannsche Flächen** *(Jens Babutzka)*
   Literatur: [HS09] Abschnitt 2, [Har77] Abschnitt I.6, [Mir95]

   Die Kategorie der geschlossenen Riemannschen Flächen und der projektiven komplexen Kurven sind äquivalent zueinander. Dies ist ein Spezialfall des GAGA-Prinzips aus [Ser56]. Es erlaubt uns, Punkte in $\mathcal{M}_g$ wahlweise als Riemannsche Flächen und als projektive Kurven aufzufassen und so zwischen der „analytischen Welt" und der „algebraisch-geometrischen Welt" beliebig hin und her zu wechseln. Eventuell: Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$ als Riemannsche Flächen $\mathbb{C}/\Lambda$ (nur Beweisidee z. B. aus [Sil86] Kapitel VI 2-4).

3. **Vorbereitungen aus der Algebraischen Geometrie: Getwistete Garben** *(Benjamin Peters)*
   Literatur: [Har77] Kapitel II.5

   Einführung von Idealgarben (Def. auf S. 109, dann ab Def. auf S. 115). Quasikohärente Idealgarben entsprechen abgeschlossenen Unterschemata. Modulgarben $\widetilde{M}$ auf dem projektiven Schema $\mathrm{Proj}(S)$. Getwistete Garben $\mathcal{O}(n)$ und $\mathcal{F}(n)$ und erste Eigenschaften von ihnen. Eventuell: Projektive Schemata sind von der Form $\mathrm{Proj}(S)$. Eventuell: Garben, die durch globale Schnitte erzeugt werden; für projektive k-Schemata bilden die globalen Schnitte zu einer kohärenten Garbe $\mathcal{F}$ auf X einen endlich erzeugten k-Vektorraum.

4. **Vorbereitungen aus der Algebraischen Geometrie: Čech-Kohomologie** *(Tobias Columbus)*
   Literatur: [Har77] Kapitel III.4 und 5

   Definition der Čech-Kohomologie. Unter den „richtigen" Voraussetzungen stimmt die Čech-Kohomologie mit der aus der Vorlesung bekannten Kohomologie überein. Die Čech-Kohomologie kann man häufig besser konkret berechnen. Eventuell: die Čech-Kohomologie für projektive Schemata.

5. **Klassifikationsgrößen: das Hilbertpolynom** *(Malte Kliemann)*
   Literatur: [Har77] Kapitel I.7 (eventuell nur knapp verwenden), III.Exc.5.2, 5.3 (hierzu muss noch Literatur nachgeliefert werden), III.9 (bis Kor 9.4 einschließlich)

   Einführung des Hilbertpolynoms, des arithmetischen und des geometrischen Geschlechts. Flache Morphismen. Kohomologie kommutiert mit flachem Basiswechsel (eventuell in nächsten Vortrag verschieben).

6. und 7. **Das Hilbertschema: Das Modulproblem, Beispiele und die Konstruktionsidee** *(David Weniger und Michael Fütterer)*
   Literatur: [ACG11] Abschnitt IX.2

   Das Modulproblem der Klassifikation von eingebetteten Untervarietäten des $\mathbb{P}^r$ mit festem Hilbertpolynom. Erste Beispiele: Hyperflächen im $\mathbb{P}^r$, Graßmannsche Varietäten, Kurven von Grad 2 in $\mathbb{P}^3$. Die Konstruktionsidee des Hilbertschemas.

8. **Warum Flachheit toll ist** *(Vanessa Schmidt)*
Literatur: [Har77] Kapitel III.9 (ab „Flat Families"), [ACG11] Abschnitt IX.3

   In flachen Familien von Unterschemata des $\mathbb{P}^r$ über reduzierten Basen ist das Hilbertpolynom der Fasern lokal-konstant. Somit eigenen sich genau solche Familien, um den Modulfunktor zu definieren.

9. **Konstruktion des Hilbertschemas (zumindest in Auszügen)** *(Jonathan Zachhuber)*
Literatur: [ACG11] Abschnitt IX.4

Falls noch Zeit bleibt, könnte man z. B. noch folgenden Vortrag anschließen:

10. **Ausblick: vom Hilbertschema zum Modulraum M_g**

Literatur

[ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths, *Geometry of algebraic curves. Volume II. With a contribution by Joseph Daniel Harris*, Springer, 2011.

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[HM98] Joe Harris and Ian Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, 1998.

[HS09] Frank Herrlich and Gabriela Schmithüsen, *Dessins d'enfants and Origami curves*, Handbook of Teichmueller theory II. Ed. A. Papadopoulos, European Mathematical Society (2009), 767–809, `http://www.math.kit.edu/iag3/~schmithuesen/media/dessins.pdf`.

[Mir95] Rick Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, Amer. Math. Soc., 1995.

[Ser56] Jean-Pierre Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Annales de l'institut Fourier (1956), 1–42, `http://www.numdam.org/item?id=AIF_1956__6__1_0`.

[Sil86] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, 1986.