# Idealgarben

Benjamin Peters

Institut für Algebra und Geometrie

Montag, 14. November 2011

Wiederholung

Idealgarben

Getwistete Garben

Assoziierte Moduln

Satz von Serre

# Wiederholung

## $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Eine $\mathcal{O}_X$-*Modulgarbe* ist eine Garbe $\mathscr{F}$ auf $X$, so dass $\mathscr{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist und deren Restriktionsabbildungen $\rho_V^U$, für $V \subseteq U$ $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismen sind.

## (quasi-)kohärente Modulgarben

Eine solche Garbe $\mathscr{F}$ heißt *quasi-kohärent*, falls für jede offene affine Teilmenge $Spec\ A = U \subseteq X$ gilt: $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$ für einen $A$-Modul $M$. Sie heißt *kohärent*, falls $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul ist.

# Wiederholung

## $\mathcal{O}_X$-Modulgarben

Eine *$\mathcal{O}_X$-Modulgarbe* ist eine Garbe $\mathscr{F}$ auf $X$, so dass $\mathscr{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modul ist und deren Restriktionsabbildungen $\rho_V^U$, für $V \subseteq U$ $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismen sind.

## (quasi-)kohärente Modulgarben

Eine solche Garbe $\mathscr{F}$ heißt *quasi-kohärent*, falls für jede offene affine Teilmenge $Spec\ A = U \subseteq X$ gilt: $\mathscr{F}|_U = \tilde{M}$ für einen $A$-Modul $M$.
Sie heißt *kohärent*, falls $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul ist.

# Erste Definitionen

## Freie Garben und deren Rang

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *frei*, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe $\bigoplus \mathcal{O}_X$ ist.
$\mathscr{F}$ heißt *lokal frei*, falls es eine Überdeckung $\{U_i\}$ gibt, so dass $\mathscr{F}|_{U_i}$ eine freie $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modulgarbe ist.
Der *Rang* von $\mathscr{F}$ auf einem solchen $U_i$ ist die Anzahl der Summanden in der direkten Summe.

## Invertierbare Garben

Ist $X$ zusammenhängend, so ist der Rang für jedes $U_i$ gleich.
Eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von Rang 1 nennen wir *invertierbare Garbe*.

# Erste Definitionen

## Freie Garben und deren Rang

Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *frei*, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe $\bigoplus \mathcal{O}_X$ ist.
$\mathscr{F}$ heißt *lokal frei*, falls es eine Überdeckung $\{U_i\}$ gibt, so dass $\mathscr{F}|_{U_i}$ eine freie $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modulgarbe ist.
Der *Rang* von $\mathscr{F}$ auf einem solchen $U_i$ ist die Anzahl der Summanden in der direkten Summe.

## Invertierbare Garben

Ist $X$ zusammenhängend, so ist der Rang für jedes $U_i$ gleich.
Eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von Rang 1 nennen wir *invertierbare Garbe.*

# Erste Definitionen

## Garbe von Idealen

Eine *Garbe von Idealen* $\mathscr{J}$ auf $X$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, die eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist.
Anschaulicher: Für jedes offene $U \subseteq X$ gilt: $\mathscr{J}(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$.

## Idealgarbe

Sei $X$ ein Schema, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, $i : Y \hookrightarrow X$.
$\mathscr{J}_Y := Kern(i^{\#})$ heißt *Idealgarbe* von $Y$.

# Erste Definitionen

## Garbe von Idealen

Eine *Garbe von Idealen* $\mathscr{J}$ auf $X$ ist eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, die eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist.
Anschaulicher: Für jedes offene $U \subseteq X$ gilt: $\mathscr{J}(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$.

## Idealgarbe

Sei $X$ ein Schema, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, $i : Y \hookrightarrow X$.
$\mathscr{J}_Y := Kern(i^\#)$ heißt *Idealgarbe* von $Y$.

# Idealgarben und Quasi-kohärente Garben

## Proposition

Sei $X$ ein Schema.

a) Ist $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist $\mathscr{J}_Y$ eine quasi-kohärente Garbe von Idealen.
b) Ist des Weiteren $X$ noethersch, so ist $\mathscr{J}_Y$ sogar kohärent.
c) Umgekehrt gilt: Ist $\mathscr{F}$ eine quasi-kohärente Garbe von Idealen auf $X$, so ist $\mathscr{F} = \mathscr{J}_Y$ für ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema $Y \subseteq X$.

# Ein Korollar

## Korollar

Ist $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema, so gibt es eine 1:1-Korrespondenz zwischen den Idealen in $\operatorname{Spec} A$ und den abgeschlossenen Unterschemata $Y \subseteq X$.
Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

# Assoziierte Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring, $M$ ein graduierter $S$-Modul.

## Assoziierte Garbe

$\tilde{M}(U) := \{s : U \to \dot{\bigcup}_{p \in U} M_{(p)} \mid s$ lässt sich lokal als Bruch schreiben$\}$
definiert die zu $M$ auf Proj $S$ assoziierte Garbe, $U \subseteq \operatorname{Proj} S$ offen.

## Proposition

Es gilt:

a) $\forall p \in X : (\tilde{M})_p = M_{(p)}$.

b) $\forall$ homogene $f \in S_+ : \tilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}}$ auf $\operatorname{Spec}(S_{(f)})$.

c) $\tilde{M}$ ist eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

d) Ist $S$ noethersch und $M$ endlich erzeugt, so ist $\tilde{M}$ kohärent.

# Assoziierte Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring, $M$ ein graduierter $S$-Modul.

## Assoziierte Garbe

$\tilde{M}(U) := \{s : U \to \dot{\bigcup}_{p \in U} M_{(p)} \mid s \text{ lässt sich lokal als Bruch schreiben}\}$ definiert die zu $M$ auf $\operatorname{Proj} S$ assoziierte Garbe, $U \subseteq \operatorname{Proj} S$ offen.

## Proposition

Es gilt:

a) $\forall p \in X \,:\, (\tilde{M})_p = M_{(p)}$.

b) $\forall$ homogene $f \in S_+ \,:\, \tilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}}$ auf $\operatorname{Spec}(S_{(f)})$.

c) $\tilde{M}$ ist eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.

d) Ist $S$ noethersch und $M$ endlich erzeugt, so ist $\tilde{M}$ kohärent.

# Getwistete Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein graduierter $S$-Modul.

## Erinnerung: Twist eines Moduls

Sei $l \in \mathbb{Z}$. $M(l)$ ist definiert über seine Zerlegung $M(l)_i := M_{l+i}$.

## Getwistete Garben

Sei $X = \operatorname{Proj} S$.

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$.

b) $\mathcal{O}_X(1)$ nennen wir die *getwistete Garbe von Serre.*

c) Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so heißt $\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ *Twist der Garbe* $\mathscr{F}$.

# Getwistete Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} M_d$ ein graduierter $S$-Modul.

## Erinnerung: Twist eines Moduls

Sei $l \in \mathbb{Z}$. $M(l)$ ist definiert über seine Zerlegung $M(l)_i := M_{l+i}$.

## Getwistete Garben

Sei $X = \operatorname{Proj} S$.

a) Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$.

b) $\mathcal{O}_X(1)$ nennen wir die *getwistete Garbe von Serre*.

c) Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so heißt $\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ *Twist der Garbe* $\mathscr{F}$.

# Eigenschaften getwisteter Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj} S$ und $S$ von $S_1$ als $S_0$-Algebra erzeugt.

## Bemerkung

Dann gibt es eine Überdeckung $D_+(f)$ mit $f \in S_1$ von $X$.

## Proposition

Es gilt:

a) $\mathcal{O}_X(n)$ ist eine invertierbare Garbe.

b) Ist $M$ ein graduierter $S$-Modul, so folgt: $\tilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$.
Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.

# Eigenschaften getwisteter Garben

Sei $S$ ein graduierter Ring,$X = \operatorname{Proj} S$ und $S$ von $S_1$ als $S_0$-Algebra erzeugt.

## Bemerkung

Dann gibt es eine Überdeckung $D_+(f)$ mit $f \in S_1$ von $X$.

## Proposition

Es gilt:

a) $\mathcal{O}_X(n)$ ist eine invertierbare Garbe.

b) Ist $M$ ein graduierter $S$-Modul, so folgt: $\tilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$.
Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.

# Assoziierte Moduln

## Assoziierter Modul

Sei $S$ ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj} S$ und $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. So heißt $\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ der *graduierte zu $\mathscr{F}$ assoziierte $S$-Modul* und ist es auch.

## Proposition

Sei $A$ ein Ring, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geq 1$ und $X = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^r_A$. So gilt: $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong S$.

# Assoziierte Moduln

## Assoziierter Modul

Sei $S$ ein graduierter Ring, $X = \operatorname{Proj} S$ und $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. So heißt $\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ der *graduierte zu $\mathscr{F}$ assoziierte $S$-Modul* und ist es auch.

## Proposition

Sei $A$ ein Ring, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geq 1$ und $X = \operatorname{Proj} S = \mathbb{P}^r_A$. So gilt: $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong S$.

# Assoziiert von assoziiert

## Proposition

Sei $S$ von $S_1$ endlich erzeugt als $S_0$-Algebra, $X = \operatorname{Proj} S$ und $\mathscr{F}$ eine quasi-kohärente Garbe auf $X$. Dann: $\widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})} \cong \mathscr{F}$.

## Korollar

Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-Schema $Y$ ist genau dann projektiv, wenn es isomorph zu $\operatorname{Proj} S$ ist, wobei $S$ ein graduierter Ring ist, der von $S_1$ als $S_0 = A$-Algebra endlich erzeugt wird.

# Assoziiert von assoziiert

## Proposition

Sei $S$ von $S_1$ endlich erzeugt als $S_0$-Algebra, $X = \operatorname{Proj} S$ und $\mathscr{F}$ eine quasi-kohärente Garbe auf $X$. Dann: $\widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})} \cong \mathscr{F}$.

## Korollar

Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-Schema $Y$ ist genau dann projektiv, wenn es isomorph zu $\operatorname{Proj} S$ ist, wobei $S$ ein graduierter Ring ist, der von $S_1$ als $S_0 = A$-Algebra endlich erzeugt wird.

# Definitionen

## Getwistete Garbe auf $\mathbb{P}^r_Y$

Sei $Y$ ein Schema. $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_Y}(1) := g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$ mit $g : \mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ heißt *die getwistete Garbe auf* $\mathbb{P}^r_Y$.

## sehr ampel

Sei $X$ ein $Y$-Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X$. $\mathscr{L}$ heißt *sehr ampel* bezüglich $Y$, falls es eine Immersion $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ mit $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathscr{L}$ gibt.

## von globalen Schnitten erzeugt

Sei $X$ ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, falls es $\{s_i\}_{i \in I}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ gibt, so dass für jedes $p \in X$ der Halm $\mathscr{F}_p$ von den Bildern der $s_i$ als $\mathcal{O}_{X,p}$-Modul erzeugt ist.

# Definitionen

## Getwistete Garbe auf $\mathbb{P}^r_Y$

Sei $Y$ ein Schema. $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_Y}(1) := g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$ mit $g : \mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ heißt *die getwistete Garbe auf* $\mathbb{P}^r_Y$.

## sehr ampel

Sei $X$ ein $Y$-Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X$. $\mathscr{L}$ heißt *sehr ampel* bezüglich $Y$, falls es eine Immersion $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ mit $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathscr{L}$ gibt.

## von globalen Schnitten erzeugt

Sei $X$ ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, falls es $\{s_i\}_{i \in I},\ s_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ gibt, so dass für jedes $p \in X$ der Halm $\mathscr{F}_p$ von den Bildern der $s_i$ als $\mathcal{O}_{X,p}$-Modul erzeugt ist.

# Definitionen

## Getwistete Garbe auf $\mathbb{P}^r_Y$

Sei $Y$ ein Schema. $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_Y}(1) := g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$ mit $g : \mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ heißt *die getwistete Garbe auf* $\mathbb{P}^r_Y$.

## sehr ampel

Sei $X$ ein $Y$-Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf $X$. $\mathscr{L}$ heißt *sehr ampel* bezüglich $Y$, falls es eine Immersion $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ mit $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathscr{L}$ gibt.

## von globalen Schnitten erzeugt

Sei $X$ ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, falls es $\{s_i\}_{i \in I}$, $s_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ gibt, so dass für jedes $p \in X$ der Halm $\mathscr{F}_p$ von den Bildern der $s_i$ als $\mathcal{O}_{X,p}$-Modul erzeugt ist.

# Satz von Serre

### Satz

Seien $X$ ein projektives $A$-Schema, $A$ ein noetherscher Ring, $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf $X$ sowie $\mathscr{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $\mathscr{F}(n)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt ist.

# Satz

### Satz

Sei $k$ ein Körper, $A$ eine endlich erzeugte $k$-Algebra, $X$ ein projektives $A$-Schema und $\mathscr{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. So ist $\Gamma(X, \mathscr{F})$ ein endlich erzeugter $A$-Modul.
Insbesondere gilt für $A = k$, dass $\Gamma(X, \mathscr{F})$ ein endlich erzeugter $k$-Vektorraum ist.

# Appendix

∼-Funktor

Graduierte Moduln

Immersion

# ∼-Funktor

Präzise heißt das:

$\tilde{M}(U) := \{s : U \to \dot{\bigcup}_{p \in U} M_{(p)} \mid \forall p \in U \, \exists$ eine offene Umgebung $V \ni p, \; \exists$ homogene Elemente $m \in M, f \in S$ mit $deg(m) = deg(f) \; : \; \forall q \in V : \; f \notin q$ und $s(q) = \frac{m}{f}$ in $M_{(q)}\}$

# Graduierte Moduln

## Definition

Ist $S$ ein graduierter Ring und $M$ ein $S$-Modul, so nennen wir $M$ einen graduierten $S$-Modul, falls $M$ eine Zerlegung $M = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}}$ besitzt und $S_d \cdot M_e \subseteq M_{d+e}$ gilt.

# Immersion

## Definition

Ein Morphismus $i : X \to Z$ heißt *Immersion*, falls er einen Isomorphismus von $X$ mit einem offenen Unterschema eines abgeschlossenen Unterschemas von $Z$ liefert.