Idealgarben

Definition Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *frei*, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe $\bigoplus \mathcal{O}_X$ ist.
$\mathscr{F}$ heißt *lokal frei*, falls es eine Überdeckung $\{U_i\}$ gibt, so dass $\mathscr{F}|_{U_i}$ eine freie $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modulgarbe ist.
Der *Rang* von $\mathscr{F}$ auf einem solchen U_i ist die Anzahl der Summanden in der direkten Summe.
Ist X zusammenhängend, so ist der Rang für jedes U_i gleich. Eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe von Rang 1 nennen wir *invertierbare Garbe.*

Definition Eine *Garbe von Idealen* ist eine Garbe von Moduln $\mathscr{J}$ auf X, die eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist.
Anschaulicher: Für jedes offene $U \subseteq X$ gilt: $\mathscr{J}(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$.

Definition Sei X ein Schema, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, $i : Y \hookrightarrow X$.
$\mathscr{J}_Y := Kern(i^\#)$ heißt *Idealgarbe* von Y.

Proposition Sei X ein Schema.

a) Ist $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist $\mathscr{J}_Y$ eine quasi-kohärente Garbe von Idealen. Ist des Weiteren X noethersch, so ist $\mathscr{J}_Y$ sogar kohärent.

b) Umgekehrt gilt: Ist $\mathscr{F}$ eine quasi-kohärente Garbe von Idealen auf X, so ist $\mathscr{F} = \mathscr{J}_Y$ für ein eindeutiges abgeschlossenes Unterschema $Y \subseteq X$.

Korollar Ist $X = Spec\ A$, so gibt es eine 1:1-Korrespondenz zwischen den Idealen in A und den abg. Unterschemata $Y \subseteq X$.
Insbesondere ist jedes abg. Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

Projektive assoziierte Garben

Sei ab jetzt, falls nicht anders erwähnt, S ein graduierter Ring und $M = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} M_d$ ein graduierter S-Modul.

Definition $\tilde{M}(U) := \{s : U \to \dot{\bigcup}_{p\in U} M_{(p)} \mid s$ lässt sich lokal als Bruch schreiben$\}$ definiert die zu M auf $Proj\ S$ assoziierte Garbe, $U \subseteq Proj\ S$ offen.

Proposition Es gilt:

a) $\forall p \in X\ :\ (\tilde{M})_p = M_{(p)}$.

b) $\forall$ homogene $f \in S_+\ :\ \tilde{M}|_{D_+(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}}$ auf $Spec(S_{(f)})$.

c) $\tilde{M}$ ist eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Ist S noethersch und M endlich erzeugt, so ist $\tilde{M}$ kohärent.

Twists von allem Möglichen

Erinnerung Sei $l \in \mathbb{Z}$. $M(l)$ ist definiert über seine Zerlegung $M(l)_i := M_{l+i}$.

Definition Sei $X = Proj\ S$. Für $n \in \mathbb{Z}$ definiere $\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)}$. $\mathcal{O}_X(1)$ nennen wir die *getwistete Garbe von Serre.* Ist $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so heißt $\mathscr{F}(n) := \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ *Twist der Garbe* $\mathscr{F}$.

Proposition Es gilt:

a) $\mathcal{O}_X(n)$ ist eine invertierbare Garbe.

b) $\tilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \cong \mathcal{O}_X(n+m)$.

Definition Sei $X = Proj\ S$ und $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. So heißt $\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathscr{F}(n))$ der *graduierte zu $\mathscr{F}$ assoziierte S-Modul* und ist es auch.

Proposition Sei A ein Ring, $S = A[x_0, \ldots, x_r]$, $r \geq 1$ und $X = Proj\ S = \mathbb{P}^r_A$. So gilt: $\Gamma_*(\mathcal{O}_X) \cong S$.

Proposition Sei S von S_1 endlich erzeugt als S_0-Algebra, $X = Proj\ S$ und $\mathscr{F}$ eine quasikohärente Garbe auf X. Dann: $\widetilde{\Gamma_*(\mathscr{F})} \cong \mathscr{F}$.

Definition Sei Y ein Schema. $\mathcal{O}(1) := g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}}(1))$ mit $g : \mathbb{P}^r_Y = \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}}$ heißt *die getwistete Garbe auf* $\mathbb{P}^r_Y$.
Sei X ein Y-Schema, $\mathscr{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. $\mathscr{L}$ heißt *sehr ampel* bezüglich Y, falls es eine Immersion $i : X \to \mathbb{P}^r_Y$ mit $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathscr{L}$ gibt.
Sei X ein Schema. Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathscr{F}$ heißt *von globalen Schnitten erzeugt*, falls es $\{s_i\}_{i \in I}, s_i \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ gibt, so dass für jedes $p \in X$ der Halm $\mathscr{F}_p$ von den Bildern der s_i als $\mathcal{O}_p$-Modul erzeugt ist.

Satz Seien X ein projektives A-Schema, d.h. $Spec\ A \to X$, A ein noetherscher Ring, $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample Garbe auf X sowie $\mathscr{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe.
Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $n \geq n_0$ $\mathscr{F}(n)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt ist.

Satz Sei k ein Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra, X ein projektives A-Schema und $\mathscr{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. So ist $\Gamma(X, \mathscr{F})$ ein endlich erzeugter A-Modul.
Insbesondere gilt für $A = k$, dass $\Gamma(X, \mathscr{F})$ ein endlich erzeugter k-Vektorraum ist.