Čech-Kohomologie

Tobias Columbus

23. Januar 2012

Wir konstruieren zu einer offenen Überdeckung $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ eines topologischen Raumes X die Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ von $\mathscr{U}$ mit Koeffizienten in einer Garbe $\mathscr{F}$ auf X. Wir werden weiterhin die Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}(X, \mathscr{F})$ als Kolimes dieser Kohomologiegruppen über alle offenen Überdeckungen von X definieren. Anschließend studieren wir den Zusammenhang zwischen der Garbenkohomologie $\mathrm{H}(X, \mathscr{F})$ und der Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ einer Überdeckung $\mathscr{U}$ von X, die bestimmten Anforderungen genügt. Als Anwendung dieser Theorie wird beispielhaft die Kohomologie des projektiven Raums $X = \mathbb{P}^n(A)$ über einem noetherschen Ring A mit Koeffizienten in Twists der Strukturgarbe $\mathscr{O}_X$ berechnet und damit ein Theorem von Serre bewiesen. Die Darstellung folgt weitestgehend derjenigen in [God58], [Bre97], [Har77] und [Ser55].

X bezeichne stets einen festen, topologischen Raum mit einer Garbe $\mathscr{R}$ von Ringen und einer Garbe $\mathscr{F}$ von $\mathscr{R}$-Moduln auf X. Ferner sei $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine feste Überdeckung von X mit einer totalen Ordnung $\leq$ auf I.

1 Konstruktion der Čech-Kohomologie

1.1 Der Nerv von $\mathscr{U}$. Sei $p \geq 0$ eine ganze Zahl. Ein Tupel $\sigma = (i_0, i_1, \dots, i_p)$ von $p+1$ Indizes $i_j \in I$ mit $i_0 < i_1 < \dots < i_p$ heißt *p-Simplex*, falls der Schnitt

$$U_\sigma = U_{i_0, i_1, \dots, i_p} = U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$$

nichtleer ist[1]. Mit $\mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ bezeichnen wir die Menge aller p-Simplizes. Ist ein $j \in \{0, \dots, p+1\}$ gegeben, so definiert die Vorschrift

$$(i_0, i_1, \dots, i_p, i_{p+1}) \mapsto (i_0, i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1})$$

[1] Diese Definition eines p-Simplex ist sehr restriktiv, vereinfacht aber konkrete Rechnungen. Wir werden in Nr. 1.5 noch sehen, dass man ebenso auch leere Schnitte U_σ sowie sich wiederholende Indizes $i_j = i_{j+1}$ zulassen kann – ohne das Endergebnis unserer Konstruktion zu ändern.

eine Abbildung $d_j \colon \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+1} \to \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ – den *j-ten Rand*. Zwei komponierbare Ränder d_i und d_j erfüllen für $i < j$ offenbar die Identität

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \tag{1.1.1}$$

Die Mengen $\mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ von p-Simplizes und die zugehörigen Ränder werden oft in einem Diagramm der folgenden Form visualisiert.

$$\mathrm{N}(\mathscr{U})_0 \overset{d_1}{\underset{d_0}{\leftleftarrows}} \mathrm{N}(\mathscr{U})_1 \overset{d_2}{\underset{d_0}{\Lleftarrow}} \mathrm{N}(\mathscr{U})_2 \overset{d_3}{\underset{d_0}{\Lleftarrow}} \mathrm{N}(\mathscr{U})_3 \overset{d_4}{\underset{d_0}{\Lleftarrow}} \cdots$$

Die Gesamtheit aller p-Simplizes $\mathrm{N}(\mathscr{U})_p$, $p \in \mathbb{N}$, zusammen mit den Rändern d_j nennen wir den *Nerv von $\mathscr{U}$*[2].

1.2 Die Čech-Kohomologie von $\mathscr{U}$. Sei $R = \Gamma(X, \mathscr{R})$. Zu einer Garbe $\mathscr{F}$ von $\mathscr{R}$-Moduln auf X konstruieren wir aus dem Nerv von $\mathscr{U}$ einen Komplex $C^* = C^*(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ von R-Moduln. Für $p \geq 0$ definiere dazu

$$C^p = C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{F}(U_\sigma) \tag{1.2.1}$$

Ein Element $\alpha \in C^p$ ist also eine Familie $(\alpha_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p}$ von Elementen $\alpha_\sigma \in \mathscr{F}(U_\sigma)$. Betrachte nun ein festes $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+1}$. Die Inklusionen $U_\sigma \hookrightarrow U_{d_j\sigma}$ induzieren Restriktionen $U_{d_j\sigma} \to U_\sigma$. Für $\alpha \in C^p$ ist

$$(\delta\alpha)_\sigma = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \cdot \alpha_{d_j\sigma}|_{U_\sigma}$$

ein Element $(\delta\alpha)_\sigma \in \mathscr{F}(U_\sigma)$. Lässt man $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+1}$ variieren, so erhält man ein Element $\delta\alpha \in C^{p+1}$. Da bereits alle Restriktionen Morphismen von R-Moduln sind, definiert dies einen Homomorphismus $\delta \colon C^p \to C^{p+1}$, $\alpha \mapsto \delta\alpha$.

1.2.1 Lemma C^* zusammen mit den Abbildungen δ ist ein Komplex von R-Moduln. †

Beweis: Betrachte für festes $\alpha \in C^p$ und festes $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+2}$ die Komponente von $\delta^2\alpha$ bei σ.

$$(\delta^2\alpha)_\sigma = \sum_{j=0}^{p+2} (-1)^j \cdot (\delta\alpha)_{d_j\sigma}|_{U_\sigma} = \sum_{j=0}^{p+2} \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{j+i} \cdot \alpha_{d_i d_j \sigma}|_{U_{d_j\sigma}}|_{U_\sigma} \tag{1.2.2}$$

Für $i < j$ ist nach (1.1.1) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ – also auch $\alpha_{d_i d_j \sigma} = \alpha_{d_{j-1} d_i \sigma}$. Weiterhin ist die Komposition $\mathscr{F}(U_{d_i d_j \sigma}) \to \mathscr{F}(U_{d_j\sigma}) \to \mathscr{F}(U_\sigma)$ offenbar nichts anderes als die Restriktion $\mathscr{F}(U_{d_j d_i \sigma}) \to$

[2] Der Nerv $\mathrm{N}(\mathscr{U})$ ist ein Beispiel für eine *semi-simpliziale Menge*. Da wir nur am Rande an allgemeinen Aussagen über semi-simpliziale Mengen interessiert sind, verzichten wir hier auf eine abstrakte Herangehensweise. Der interessierte Leser kann jedoch zum Beispiel in [May67] oder [Wei95], Chapter 8 mehr über die Bedeutung von semi-simplizialen und simplizialen Mengen in der Homotopie- und Homologietheorie erfahren.

$\mathscr{F}(U_\sigma)$. Eingesetzt in (1.2.2), erhält man nun

$$(\delta^2\alpha)_\sigma = \sum_{0\le i<j\le p+2} (-1)^{j+i} \cdot \alpha_{d_{j-1}d_i\sigma}|_{U_\sigma} \qquad + \sum_{0\le j\le i\le p+1} (-1)^{j+i} \cdot \alpha_{d_id_j\sigma}|_{U_\sigma}$$

Mit einer Indexverschiebung $j \rightsquigarrow j-1$ und anschließendem Vertauschen der Indizes i und j in der ersten Summe, ergibt sich schlussendlich

$$\begin{aligned}(\delta^2\alpha)_\sigma &= \sum_{0\le j\le i\le p+1} (-1)^{i+j+1} \cdot \alpha_{d_id_j\sigma}|_{U_\sigma} \qquad + \sum_{0\le j\le i\le p+1} (-1)^{j+i} \cdot \alpha_{d_id_j\sigma}|_{U_\sigma} \\ &= 0\end{aligned}$$

Somit ist $\delta^2 = 0$ und $0 \to C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} C^2 \to \cdots$ ein Komplex von R-Moduln[3]. ■

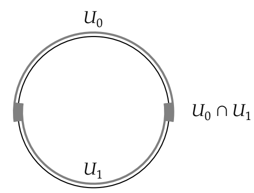
Der Komplex C^* heißt *Čech-Komplex* von $\mathscr{U}$ mit Koeffizienten in $\mathscr{F}$ und wir definieren die *Čech-Kohomologie* $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$ *der Überdeckung* $\mathscr{U}$ *mit Koeffizienten in* $\mathscr{F}$ als Kohomologie $\mathrm{H}^*(C^*)$ des Čech-Komplexes. Etwas konkreter ist die p-te Čech-Kohomologiegruppe $\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ also durch

$$\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \frac{\ker\left(C^p \xrightarrow{\delta} C^{p+1}\right)}{\mathrm{im}\left(C^{p-1} \xrightarrow{\delta} C^p\right)}$$

gegeben.

1.3 Čech-Kohomologie der S^1 mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Wir betrachten die 1-Sphäre $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ mit der von $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ induzierten Topologie und der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$. Für $0 < \epsilon < 1$ wird die S^1 von den offenen Mengen U_0 und U_1 mit

$$\begin{aligned}U_0 &= \{x = (x,y) \in S^1 \mid y > -\epsilon\} \\ U_1 &= \{x = (x,y) \in S^1 \mid y < \epsilon\}\end{aligned}$$



überdeckt. Die Moduln C^p des Komplexes C^* sind also in diesem Beispiel

$$\begin{aligned}C^0 &= \mathbb{Z}(U_0) \times \mathbb{Z}(U_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ C^1 &= \mathbb{Z}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ C^p &= 0 \quad \text{für } p > 1\end{aligned}$$

Es ist weiterhin leicht zu berechnen, dass

$$\delta(\alpha_0, \alpha_1) = d^0_{\mathbb{Z}}\alpha_0 - d^1_{\mathbb{Z}}\alpha_1 = (\alpha_0 - \alpha_1, \alpha_0 - \alpha_1)$$

[3]Sowohl die Konstruktion von C^* als auch der Beweis von $\delta^2 = 0$ sind offenbar unabhängig davon, dass X ein topologischer Raum, $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X ist. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass allein die Gleichung (1.1.1) – also die Tatsache, dass $\mathrm{N}(\mathscr{U})$ eine semi-simpliziale Menge ist – und die Funktorialität der R-Moduln $\mathscr{F}(\sigma) = \mathscr{F}(U_\sigma)$ in die Konstruktion der C^p und die etwas längliche Rechnung $\delta^2 = 0$ eingeflossen sind.

die einzig nicht-triviale Abbildung $\delta\colon C^0 \to C^1$ ist. Folglich sind die Čech-Kohomologiegruppen $\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathbb{Z})$ der Überdeckung $\mathscr{U} = \{U_0, U_1\}$ durch

$$\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \dfrac{\ker\left(C^0 \to C^1\right)}{\operatorname{im}\left(C^{-1} \to C^0\right)} = \dfrac{\{(x,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\}}{0} = \mathbb{Z} & \text{für } p = 0 \\[2em] \dfrac{\ker\left(C^1 \to C^2\right)}{\operatorname{im}\left(C^0 \to C^1\right)} = \dfrac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{(x,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} & \text{für } p = 1 \\[2em] 0 & \text{für } p \geq 2 \end{cases}$$

gegeben.

1.4 Čech-Kohomologie von $\mathbb{P}^r$ mit Koeffizienten in $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^r}(n)$. Sei $r \geq 1$ ganz, A ein noetherscher Ring, $S = A[x_0, \dots, x_r]$ und $X = \mathbb{P}^n(A) = \operatorname{Proj} S$. Betrachte die offene, affine Überdeckung $\mathscr{U} = (U_i)_{0\leq i\leq r}$ mit $U_i = D_+(x_i)$. Wir wollen die Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$ von $\mathscr{U}$ mit Koeffizienten in

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}_X(n)$$

berechnen. Wir wollen *ohne Beweis* davon ausgehen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathscr{O}_X(n))$$

gibt. Es wird später klarer werden, warum dieser Isomorphismus tatsächlich existiert und die Graduierung respektiert.

Für einen festen p-Simplex $\sigma = (i_0, \dots, i_p) \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ ist offenbar

$$U_\sigma = D_+(x_{i_0}) \cap D_+(x_{i_1}) \cap \dots \cap D_+(x_{i_p}) = D_+(x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_p})$$

Setzen wir $f = x_{i_0}x_{i_1}\cdots x_{i_p}$, so gibt es einen Isomorphismus $U_\sigma = D_+(f) = \operatorname{Spec} S_{(f)}$, wobei $S_{(f)}$ der Ring der Elemente von Grad 0 in der homogenen Lokalisierung S_f von S nach f ist. Genau dieser Isomorphismus $D_+(f) = \operatorname{Spec} S_{(f)}$ und die dazu gehörige Identifizierung $\widetilde{M}|_{D_+(f)} = \widetilde{M_{(f)}}$ erlauben uns nun die Berechnung der Schnitte $\mathscr{F}(D_+(f))$.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D_+(f)) = \mathscr{F}|_{D_+(f)}(D_+(f)) &= \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{S(n)}|_{D_+(f)}\right)(D_+(f)) \\ &= \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{S(n)_{(f)}}\right)(\operatorname{Spec} S_{(f)}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} S(n)_{(f)} = S_f \end{aligned}$$

Insbesondere stimmt die von $\mathscr{F}$ induzierte Graduierung mit der natürlichen Graduierung auf

S_f überein. Also ist der Čech-Komplex C^* durch

$$0 \to \prod_{i=0}^{n} S_{x_i} \to \prod_{0 \le i < j \le r} S_{x_i x_j} \to \cdots \to S_{x_0 x_1 \cdots x_r} \to 0$$

gegeben. Nun ist $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \ker\left(\prod S_{x_i} \xrightarrow{\delta} \prod S_{x_i x_j}\right)$, wobei δ für $s = (s_i/x_i^{e_i})_{0 \le i \le r}$ durch

$$(\delta s)_{x_i x_j} = s_j/x_j^{e_j} - s_i/x_i^{e_i}$$

gegeben ist. Ist $\delta s = 0$, so ist offenbar $e_i = 0$ für alle $0 \le i \le r$ und $s_i = s_j$ für alle $0 \le i, j \le r$. Insbesondere ist $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = S$ und wir haben folgendes Lemma bewiesen.

1.4.1 Lemma Die natürliche Abbildung $S \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(n))$ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(n))$ der A-Modul der homogenen Elemente von Grad n in S. †

Betrachte nun $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \operatorname{coker}\left(\prod S_{x_{i_0} x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}}} \xrightarrow{\delta} S_{x_0 x_1 \cdots x_r}\right)$. Fasse $S_{x_0 \cdots x_r}$ als freien A-Modul mit Basis $\{x_0^{e_0} \cdots x_r^{e_r} \mid e_i \in \mathbb{Z}\}$ auf. Das Bild δ wird dann offenbar von den Monomen $\{x_0^{e_0} \cdots x_r^{e_r} \mid e_j \ge 0 \text{ für ein } j\}$ als A-Modul frei erzeugt. Der Kokern $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ wird folglich von den Monomen $\{x_0^{e_0} \cdots x_r^{e_r} \mid e_j < 0 \text{ für alle } j\}$ als A-Modul frei erzeugt. Ferner ist die Graduierung auf $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ durch $\sum e_j$ gegeben. Insbesondere wird $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(-r-1))$ von den Monomen $x_0^{e_0} \cdots x_r^{e_r}$ mit $\sum e_j = -r-1$ und $e_j < 0$ für alle j erzeugt. Es gibt genau ein solches Monom $x_0^{-1} \cdots x_r^{-1}$ und wir haben folgendes Lemma bewiesen.

1.4.2 Lemma $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(-r-1)) = A$. †

Aus unseren Überlegungen folgt außerdem, dass für $n < 0$, also für $-n-r-1 > -r-1$ die Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(-n-r-1))$ verschwindet, da es kein Monom $x_0^{e_0} \cdots x_r^{e_r}$ mit $e_j < 0$ für alle j und $\sum e_j > -r-1$ gibt. Somit gilt offenbar

1.4.3 Lemma Es gibt ein $n_0 = -r$, so dass für alle $n \ge n_0$ die Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(n))$ verschwindet. †

Mit wesentlich mehr Rechenaufwand, aber ähnlichen Methoden kann man schließlich noch folgendes Lemma beweisen.

1.4.4 Lemma $\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(n)) = 0$ für alle $0 < p < r$ und alle $n \in \mathbb{Z}$. †

Die Rechnung, die zu diesem Ergebnis führt, ist zum Beispiel in [Har77], Theorem III.5.1 oder [Ser55], nº 63 nachzulesen.

1.5 Čech-Kohomologie mit mehr Simplizes. Wir haben in Nr. 1.3 und Nr. 1.4 bereits gesehen, dass sich die Čech-Kohomologie für eine tatsächliche Berechnung der Kohomologiegruppen gut eignet. Das liegt nicht zuletzt daran, dass für endliche Überdeckungen $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ auch der Čech-Komplex C^* nur aus endlich vielen nicht-trivialen Termen $C^p \ne 0$ besteht. Wir wollen in diesem Paragraphen unsere Definition des Nervs $\mathrm{N}(\mathscr{U})$ erweitern und *glauben*, dass die Kohomologiegruppen $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ dabei unverändert bleiben.

Betrachtet man die Definition (1.2.1) des p-ten Terms $C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ des Čech-Komplexes, so folgt aus der Tatsache $\mathscr{F}(\emptyset)=0$ unmittelbar, dass wir unsere ursprüngliche Forderung $U_\sigma = U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$ an einen p-Simplex $\sigma=(i_0,\dots,i_p)$ fallen lassen können, ohne dabei den Čech-Komplex C^* oder gar die Kohomologiegruppen $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$ zu verändern.

Der *unbeschränkte Čech-Komplex* ist der Komplex, dessen p-ter Term $\widehat{C}^p$ durch

$$\widehat{C}^p = \widehat{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{\sigma\in I^{p+1}} \mathscr{F}(U_\sigma)$$

gegeben ist. Die Randabbildungen $d_j\colon I^{p+1}\to I^p$ aus Nr. 1.1 sind offenbar auch für die Simplizes $\sigma\in I^{p+1}$ des unbeschränkten Čech-Komplexes wohldefiniert und man konstruiert die Abbildung $\delta\colon \widehat{C}^p \to \widehat{C}^{p+1}$ genau so wie in Nr. 1.2. Man kann zeigen, dass die Kohomologiegruppen $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$ unabhängig davon sind, ob der unbeschränkte Čech-Komplex $\widehat{C}^*$ oder der Čech-Komplex C^* aus Nr. 1.2 der Berechnung zu Grunde liegt. Einen leicht nachzuvollziehenden, aber technischen Beweis dieser Tatsache findet man zum Beispiel in [Con].

1.6 Der Übergang zu einer Verfeinerung von $\mathscr{U}$. Sei $\mathscr{V}=(V_j)_{j\in J}$ eine weitere offene Überdeckung von X, die feiner ist als $\mathscr{U}$[4]. Dann gibt es eine Abbildung $f\colon J\to I$, so dass $V_j\subset U_{f(j)}$ für alle $j\in J$. Insbesondere setzt sich f auf allen p-Simplizes zu einer Abbildung $f\colon \mathrm{N}(\mathscr{V})_p \to \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ mit $V_\sigma\subset U_{f(\sigma)}$ fort. Die Inklusionen $V_\sigma \hookrightarrow U_{f(\sigma)}$ induzieren Restriktionen $\mathscr{F}(U_{f(\sigma)})\to\mathscr{F}(V_\sigma)$ und somit einen Morphismus

$$\begin{aligned} f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}\colon C^p(\mathscr{U}) &\to C^p(\mathscr{V}) \\ (f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}\alpha)_\sigma &= \alpha_{f(\sigma)}|_{V_\sigma} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion von $f\colon \mathrm{N}(\mathscr{V})_p\to\mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ kommutieren die Ränder d_j mit f. Weiterhin stimmen die beiden Einschränkungen $\mathscr{F}(U_{d_j f(\sigma)})\to\mathscr{F}(U_{f(\sigma)})\to\mathscr{F}(V_\sigma)$ und $\mathscr{F}(U_{f(d_j\sigma)})\to\mathscr{F}(V_{d_j\sigma})\to\mathscr{F}(V_\sigma)$ für festes $\sigma\in\mathrm{N}(\mathscr{V})_{p+1}$ überein und somit ist

$$\begin{aligned}\left(f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}\delta(\alpha)\right)_\sigma = (\delta\alpha)_{f(\sigma)}\big|_{V_\sigma} &= \left(\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\cdot \alpha_{d_j f(\sigma)}\big|_{U_{f(\sigma)}}\right)\Bigg|_{V_\sigma} \\ &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\cdot\left(\alpha_{f(d_j\sigma)}\big|_{V_{d_j\sigma}}\right)\Big|_{V_\sigma} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\cdot f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}(\alpha)_{d_j\sigma}\Big|_{V_\sigma} = \left(\delta f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}(\alpha)\right)_\sigma\end{aligned}$$

Also gilt $f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}\delta = \delta f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$ und $f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$ ist somit ein Morphismus von Komplexen von R-Moduln. Insbesondere induziert $f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$ daher einen Morphismus $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})\to\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{V},\mathscr{F})$.

1.6.1 Lemma Die von f induzierte Abbildung $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})\to\check{\mathrm{H}}(\mathscr{V},\mathscr{F})$ ist unabhängig von der Wahl von $f\colon J\to I$. †

[4] Eine offene Überdeckung $\mathscr{V}=(V_j)_{j\in J}$ heißt *feiner* als $\mathscr{U}=(U_i)_{i\in I}$, falls es für jedes $j\in J$ ein $i\in I$ gibt, so dass $V_j\subset U_i$. Eine feinere Überdeckung enthält demnach die kleineren, offenen Mengen.

Beweis: Sei $g\colon J \to I$ eine weitere Abbildung mit $V_j \subset U_{g(j)}$. Wir betrachten für $0 \le k \le p$ die Abbildungen $D_k\colon \mathrm{N}(\mathscr{V})_p \to \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+1}$ mit

$$(i_0, i_1, \dots, i_p) \mapsto \big(f(i_0), \dots, f(i_k), g(i_k), g(i_{k+1}), \dots, g(i_p)\big)$$

Die Funktionen D_k und die Ränder $d_j\colon \mathrm{N}(\mathscr{U})_{p+1} \to \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ bzw. $d_j\colon \mathrm{N}(\mathscr{V})_{p+1} \to \mathrm{N}(\mathscr{V})_p$ erfüllen offenbar die folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} d_j D_k &= D_{k-1} d_j && \text{für } j < k \\ d_j D_k &= D_k d_{j-1} && \text{für } k+1 < j \\ d_{k+1} D_k &= d_{k+1} D_{k+1} && \text{für } 0 \le k \le p-1 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Für festes p betrachte den Morphismus $D\colon C^{p+1}(\mathscr{U}) \to C^p(\mathscr{V})$ von R-Moduln mit

$$(D\alpha)_\sigma = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot \alpha_{D_k\sigma}$$

Ohne die Restriktionen weiter explizit mitzuführen, berechnet man für $\alpha \in C^p(\mathscr{U})$ und $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{V})_p$ die Komponente von $D\delta(\alpha)$ bei σ folgendermaßen.

$$\begin{aligned} (D\delta(\alpha))_\sigma &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \cdot \alpha_{d_j D_k \sigma} \\ &= \sum_{0 \le j < k \le p} (-1)^{j+k} \cdot \alpha_{d_j D_k \sigma} \qquad + \sum_{\substack{0 \le k \le p \\ k+1 < j \le p+1}} (-1)^{j+k} \cdot \alpha_{d_j D_k \sigma} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{2k} \cdot \alpha_{d_k D_k \sigma} \qquad + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{2k+1} \cdot \alpha_{d_{k+1} D_k \sigma} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gleichungen (1.6.1) und den Indexverschiebungen $k \rightsquigarrow k-1$, $j \rightsquigarrow j-1$ in den ersten beiden Summen bzw. $k \rightsquigarrow k+1$ in der vierten Summe, ist dann

$$\begin{aligned} (D\delta(\alpha))_\sigma &= \sum_{0 \le j \le k \le p-1} (-1)^{j+k+1} \cdot \alpha_{D_k d_j \sigma} \qquad + \sum_{0 \le k < j \le p} (-1)^{j+k+1} \cdot \alpha_{D_k d_j \sigma} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{p} \alpha_{d_k D_k \sigma} \qquad - \sum_{k=1}^{p} \alpha_{d_k D_k \sigma} \quad - \alpha_{d_{p+1} D_p \sigma} \\ &= -\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{j+k} \cdot \alpha_{D_k d_j \sigma} \qquad + \alpha_{d_0 D_0 \sigma} - \alpha_{d_{p+1} D_p \sigma} \\ &= -(\delta D(\alpha))_\sigma \qquad + \alpha_{g(\sigma)} - \alpha_{f(\sigma)} \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $D\delta + \delta D = g^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}} - f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$. Mit anderen Worten ist D eine Homotopie zwischen $g^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$ und $f^{\mathscr{U}}_{\mathscr{V}}$ und es folgt, zum Beispiel mit [Wei95], Lemma 1.4.5, dass die induzierten Abbildungen $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ übereinstimmen. ■

Sind $\mathscr{U}$ und $\mathscr{V}$ zwei offene Überdeckungen von X, die sich gegenseitig verfeinern, so folgt mit Lemma 1.6.1 unmittelbar, dass $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{V},\mathscr{F})$. Ist $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X mit $X \in \mathscr{U}$, so verfeinern sich $\mathscr{V} = \{X\}$ und $\mathscr{U}$ gegenseitig und es gilt somit

$$\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \begin{cases} \Gamma(X,\mathscr{F}) & \text{falls } p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.6.2}$$

da (1.6.2) für $\mathscr{V}$ offensichtlich erfüllt ist. Eine weitere Konsequenz aus Lemma 1.6.1 ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{V},\mathscr{F}) \arrow[dl] \\ & \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{W},\mathscr{F}) & \end{tikzcd}$$

für Verfeinerungen $\mathscr{V}$ von $\mathscr{U}$ und $\mathscr{W}$ von $\mathscr{V}$. Die Čech-Kohomologie $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$ bildet also bezüglich der Verfeinerung der offenen Überdeckungen $\mathscr{U}$ von X ein gerichtetes System und wir definieren die *Čech-Kohomologie* $\check{\mathrm{H}}^*(X,\mathscr{F})$ *von* X *mit Koeffizienten in* $\mathscr{F}$ als Kolimes

$$\check{\mathrm{H}}^*(X,\mathscr{F}) = \operatorname*{colim}_{\mathscr{U}} \check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

dieses gerichteten Systems – auch wenn diese Definition im Folgenden keine Rolle mehr spielen wird.

2 Vergleich von Čech- und Garbenkohomologie

2.1 Der Čech-Komplex als Komplex globaler Schnitte. Für $p \geq 0$ betrachte die Garbe

$$\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \iota_* \mathscr{F}|_{U_\sigma}$$

auf X. Dabei bezeichne jeweils $\iota\colon U_\sigma \hookrightarrow X$ die Inklusion und $\iota_*\mathscr{F}|_{U_\sigma}$ die direkte Bildgarbe von $\mathscr{F}|_{U_\sigma}$. Für ein offenes $V \subset X$ ist also $\mathscr{C}^p(V)$ konkret durch

$$\mathscr{C}^p(V) = \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{F}(U_\sigma \cap V)$$

gegeben. Analog zur Konstruktion von $\delta\colon C^p \to C^{p+1}$ in Nr. 1.2 definiert die Vorschrift

$$(\delta\alpha)_\sigma = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \cdot \alpha_{d_j\sigma}\big|_{U_\sigma \cap V}$$

für jedes offene $V \subset X$ einen Morphismus $\delta\colon \mathscr{C}^p(V) \to \mathscr{C}^{p+1}(V)$ mit $\delta^2 = 0$. Da δ nichts anderes als eine Summe von Restriktionen ist, kommutiert δ mit den Einschränkungen $\mathscr{C}^p(V) \to \mathscr{C}^p(W)$, $W \subset V$ offen. Mit anderen Worten ist also $\delta\colon \mathscr{C}^p \to \mathscr{C}^{p+1}$ ein Morphismus und wir erhalten einen Komplex $\mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1 \to \mathscr{C}^2 \to \cdots$ von Garben auf X, so dass $\Gamma(X,\mathscr{C}^*) = C^*$.

Für ein offenes $V \subset X$ betrachte nun die natürliche Abbildung $\epsilon\colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{C}^0(V)$ mit $\alpha \mapsto (\alpha|_{U_i \cap V})_{i\in I}$. Wiederum ist klar, dass ϵ einen Morphismus $\mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$ von Garben definiert.

2.1.1 Lemma Die Abbildung $\epsilon\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$ ist injektiv und $\mathrm{im}(\epsilon) = \ker\left(\mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1\right)$. †

Beweis: Sei $V \subset X$ offen und $\alpha \in \mathscr{F}(V)$ mit $\epsilon(\alpha) = 0$. Dann ist $\alpha|_{U_i \cap V} = 0$ für alle $i \in I$. Die $U_i \cap V$ überdecken V und es folgt $\alpha = 0$. Also ist jedes $\epsilon\colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{C}^0(V)$ und somit auch $\epsilon\colon \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0$ injektiv.

Für ein offenes $V \subset X$ betrachte nun ein $\alpha \in \ker\left(\mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1\right)(V)$. Dann ist für alle $\sigma = (i,j) \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_1$

$$0 = \alpha_{d_0\sigma}|_{U_\sigma \cap V} - \alpha_{d_1\sigma}|_{U_\sigma \cap V} = \alpha_j|_{U_i \cap U_j \cap V} - \alpha_i|_{U_i \cap U_j \cap V}$$

Da die $U_i \cap U_j \cap V$ eine offene Überdeckung von V sind und die α_i auf den Schnitten $U_i \cap U_j \cap V$ übereinstimmen, gibt es ein Amalgam $\tilde{\alpha} \in \mathscr{F}(V)$ mit $\alpha_i = \tilde{\alpha}|_{U_i \cap V}$ für alle $i \in I$. In anderer Schreibweise ist also $\epsilon(\tilde{\alpha}) = \alpha$ und es folgt $\ker\left(\mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1\right) \subset \mathrm{im}(\epsilon)$. Ist andererseits $\alpha \in \mathscr{F}(V)$ und $\sigma = (i,j) \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_1$, so folgt direkt, dass

$$(\delta\epsilon(\alpha))_\sigma = \alpha|_{U_i \cap V}\big|_{U_i \cap U_j \cap V} - \alpha|_{U_j \cap V}\big|_{U_i \cap U_j \cap V} = 0$$

Insgesamt folgt also, dass $\mathrm{im}(\epsilon) = \ker(\delta)$. ■

Als direkte Konsequenz von Lemma 2.1.1 erhalten wir für alle offenen Überdeckungen $\mathscr{U}$ von X Isomorphismen $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) = \Gamma(X, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F})$. Man überlegt sich leicht, dass diese Isomorphismen mit den natürlichen Abbildungen $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ in die Čech-Kohomologie einer Verfeinerung $\mathscr{V}$ von $\mathscr{U}$ aus Nr. 1.6 vertauschen. Insbesondere ist also $\check{\mathrm{H}}^0(X, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{F})$.

2.1.2 Proposition Die lange Sequenz

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^1 \to \cdots \to \mathscr{C}^p \xrightarrow{\delta} \mathscr{C}^{p+1} \to \cdots$$

von Garben auf X ist exakt. †

Beweis: Der Anfang $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0 \to \mathscr{C}^1$ der langen Sequenz ist bereits nach Lemma 2.1.1 exakt. Betrachte nun für $p \geq 1$ die induzierte Sequenz $\mathscr{C}_x^{p-1} \to \mathscr{C}_x^p \to \mathscr{C}_x^{p+1}$ auf den Halmen bei $x \in X$. Ist $\alpha \in \ker(\mathscr{C}_x^p \to \mathscr{C}_x^{p+1})$, so gibt es eine offene Umgebung V von x und ein $\beta \in \mathscr{C}^p(V)$ mit $\delta\beta = 0$ und $\beta_x = \alpha$. Die Umgebung V kann außerdem ohne Einschränkung so gewählt werden, dass $V \subset U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Nun ist aber die Sequenz

$$\mathscr{C}^{p-1}(V) \to \mathscr{C}^p(V) \to \mathscr{C}^{p+1}(V) \tag{2.1.1}$$

nichts anderes als der Teil $C^{p-1}(\mathscr{V}, \mathscr{F}) \to C^p(\mathscr{V}, \mathscr{F}) \to C^{p+1}(\mathscr{V}, \mathscr{F})$ des Čech-Komplexes aus Nr. 1.2 zur Überdeckung $\mathscr{V} = \{V \cap U_i\}_{i\in I}$ von V. Nach (1.6.2) ist (2.1.1) somit insbesondere exakt, da $V = V \cap U_{i_0} \in \mathscr{V}$. Nach Übergang zu den Halmen bei x ist dann aber auch die Sequenz $\mathscr{C}_x^{p-1} \to \mathscr{C}_x^p \to \mathscr{C}_x^{p+1}$ exakt. ■

Wir nennen die Auflösung $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^*$ von $\mathscr{F}$ die *Čech-Auflösung von $\mathscr{F}$*.

2.2 Čech-Kohomologie mit Koeffizienten in injektiven Garben. Die Garbenkohomologie $\mathrm{H}(X, \mathscr{F})$ von X mit Koeffizienten in $\mathscr{F}$ ist die Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte $\Gamma(X, -)$ einer injektiven Auflösung $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^*$ von $\mathscr{F}$. Um Garben- und Čech-Kohomologie vergleichen zu können, berechnen wir in diesem Abschnitt die Čech-Kohomologie von injektiven Garben. Genauer gesagt ist das einzige Ziel dieses Paragraphen der Beweis der nachstehenden Proposition.

2.2.1 Proposition Ist $\mathscr{J}$ eine injektive Garbe von $\mathscr{R}$-Moduln, so ist

$$\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U}, \mathscr{J}) = \begin{cases} \Gamma(X, \mathscr{J}) & \text{falls } p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das folgende Lemma reduziert den Beweis dieser Proposition auf den Beweis derselben Aussage für welke Garben, deren Čech-Auflösung aus technischen Gründen einfacher zu studieren ist als diejenige von injektiven Garben.

2.2.2 Lemma Ist $\mathscr{J}$ eine injektive Garbe von $\mathscr{R}$-Moduln, so ist $\mathscr{J}$ welk. †

Beweis: Sei $V \subset X$ offen und $s \in \mathscr{J}(V)$. Für ein offenes $W \subset V$ definiert die Vorschrift $a \mapsto a \cdot s|_W$ einen Morphismus $\mathscr{R}(W) \to \mathscr{J}(W)$. Da diese Abbildungen offenbar mit den Restriktionen vertauschen, erhalten wir einen Morphismus $\mu\colon \mathscr{R}|_V \to \mathscr{J}|_V$ von Garben auf V. Seien nun $\mathscr{R}_V$ bzw. $\mathscr{J}_V$ die Fortsetzungen von $\mathscr{R}|_V$ bzw. $\mathscr{J}|_V$ durch 0 außerhalb von V[5]. Dann induziert μ einen Morphismus $\mu'\colon \mathscr{R}_V \to \mathscr{J}_V$ und die universelle Eigenschaft von $\mathscr{J}$ liefert $\mu''\colon \mathscr{R} \to \mathscr{J}$, wie in folgendem, kommutativen Diagramm zu sehen.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & \\
\mathscr{R}_V \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d] & \mathscr{J}_V \arrow[r] & \mathscr{J} \\
\mathscr{R} \arrow[urr, dashed, "\exists\mu''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Betrachte nun $t = \mu''(1)$. Dann ist

$$t|_V = \mu''(1)|_V = \mu'(1) = s$$

Also haben wir tatsächlich eine Fortsetzung t von $s \in \mathscr{J}(V)$ gefunden haben. ∎

[5]Ist $V \subset X$ offen und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf V, so heißt die zu

$$W \mapsto \begin{cases} \mathscr{F}(W) & \text{falls } W \subset V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

assoziierte Garbe die *Fortsetzung von $\mathscr{F}$ durch 0 außerhalb von U*. Ist $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X und $\mathscr{F}_U$ die Fortsetzung von $\mathscr{F}|_U$ durch 0 außerhalb von U, so gibt es eine kanonische Injektion $0 \to \mathscr{F}_U \to \mathscr{F}$, die von den Inklusion $\mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(W)$ für $W \subset V$ bzw. $0 \to \mathscr{F}(W)$ für $W \not\subset V$ induziert wird.

Betrachte nun eine welke Garbe $\mathscr{F}$ auf X und die in Nr. 2.1 konstruierte Čech-Auflösung $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F})$. Gemäß der Definition von $\mathscr{C}^p = \mathscr{C}^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ ist

$$\mathscr{C}^p(V) = \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{F}(U_\sigma \cap V)$$

Da $\mathscr{F}$ welk ist, sind für $W \subset V$ alle Restriktionen $\mathscr{F}(U_\sigma \cap V) \to \mathscr{F}(U_\sigma \cap W)$ surjektiv. Insbesondere ist somit das Produkt $\mathscr{C}^p(V) \to \mathscr{C}^p(W)$ dieser Abbildungen – also die Restriktion in $\mathscr{C}^p$ – surjektiv. $\mathscr{C}^p$ ist also eine welke Garbe auf X und die Čech-Auflösung von $\mathscr{F}$ ist eine Auflösung von welken Garben. Da $\check{\mathrm{H}}^*(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ die Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte $\Gamma(X, \mathscr{C}^*)$ ist, ist Proposition 2.2.1 eine direkte Folgerung aus untenstehendem Lemma.

2.2.3 Lemma Sei $\mathscr{F}'$ eine welke Garbe auf X und sei $0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{f} \mathscr{F} \xrightarrow{g} \mathscr{F}'' \to 0$ eine exakte Sequenz. Dann ist die Sequenz $0 \to \mathscr{F}'(V) \xrightarrow{f} \mathscr{F}(V) \xrightarrow{g} \mathscr{F}''(V) \to 0$ für jedes offene $V \subset X$ exakt. †

Beweis: Da $\mathscr{F}'|_V$ ebenfalls welk ist, können wir ohne Einschränkung $V = X$ annehmen. Weil außerdem $\Gamma(X, -)$ linksexakt ist, reicht es die Surjektivität der Abbildung $g\colon \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}''(X)$ zu beweisen. Dazu sei $s \in \mathscr{F}''(X)$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{(V, t) \mid V \subset X \text{ offen}, t \in \mathscr{F}(V) \text{ und } g(t) = s|_V\}$$

Für jedes $x \in X$ ist die Sequenz $0 \to \mathscr{F}'_x \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{F}''_x \to 0$ der Halme exakt. Insbesondere gibt es daher eine offene Umgebung V von x und ein $t \in \mathscr{F}(V)$, so dass $(V, t) \in M$. Betrachte nun die Ordnung $\leq$ auf M, die durch

$$(V, t) \leq (V', t') \text{ genau dann wenn } V \subset V' \text{ und } t'|_V = t$$

gegeben ist. Offenbar ist $\leq$ eine induktive Ordnung auf $M \neq \varnothing$ und gemäß dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $(V, t) \in M$.

Um den Beweis zu beenden, führen wir nun die Annahme $V \neq X$ zum Widerspruch. Wähle ein $x \in X - V$ und eine offene Umgebung W von x, so dass $(W, t') \in M$ für ein geeignetes $t' \in \mathscr{F}(W)$. Dann ist die Differenz $r = t|_{V \cap W} - t'|_{V \cap W} \in \ker g = \operatorname{im} f$ und kann als Element $r \in \mathscr{F}'(V \cap W)$ aufgefasst werden. Nach Voraussetzung ist $\mathscr{F}'$ welk und es gibt eine Fortsetzung $r' \in \mathscr{F}'(W) \hookrightarrow \mathscr{F}(W)$ von r. Dann stimmen die Einschränkungen $t|_{V \cap W}$ und $(t' + r')|_{V \cap W} = t'|_{V \cap W} + t|_{V \cap W} - t'|_{V \cap W}$ auf $V \cap W$ überein und es existiert somit ein Amalgam $t'' \in \mathscr{F}(V \cup W)$. Nun ist aber $g(t'') = s|_{V \cup W}$, da sowohl $g(t'')|_V = g(t) = s|_V$ als auch $g(t'')|_W = g(t') + g(r') = s|_W + 0$. Es folgt, dass $(V \cup W, t'') \in M$ – ein Widerspruch zur Maximalität von (V, t). ■

2.3 Ein Theorem von Leray. In diesem Abschnitt werden wir folgendes Theorem beweisen.

2.3.1 Theorem (Leray) Sei $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X, so dass $\mathrm{H}^q(U_\sigma, \mathscr{F}) = 0$ für alle $q \geq 1$, $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ und alle $p \geq 1$. Dann ist

$$\mathrm{H}^r(X, \mathscr{F}) = \check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{F})$$

für alle $r \geq 0$. †

Seien $\mathscr{U}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathscr{F}$ eine Garbe auf X, so dass $\mathscr{U}$ und $\mathscr{F}$ den Voraussetzungen von Theorem 2.3.1 genügen. Wir wählen eine feste, injektive Auflösung $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^*$ von $\mathscr{F}$. Dann ist $0 \to \mathscr{F}|_{U_\sigma} \to \mathscr{J}|^*_{U_\sigma}$ für alle $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ und alle $p \geq 0$ eine injektive Auflösung von $\mathscr{F}|_{U_\sigma}$. Insbesondere besagt unsere Voraussetzung $\mathrm{H}^q(U_\sigma, \mathscr{F}|_{U_\sigma}) = 0$ nichts anderes, als dass

$$\mathscr{J}^{q-1}(U_\sigma) \to \mathscr{J}^q(U_\sigma) \to \mathscr{J}^{q+1}(U_\sigma)$$

für alle $q \geq 1$ exakt ist. Somit sind dann auch die induzierten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathscr{J}^{q-1})) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathscr{J}^q)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathscr{J}^{q+1})) \\
\| & & \| & & \| \\
\prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{J}^{q-1}(U_\sigma) & \longrightarrow & \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{J}^q(U_\sigma) & \longrightarrow & \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{J}^{q+1}(U_\sigma)
\end{array} \tag{2.3.1}$$

für alle $q \geq 1$ und alle $p \geq 0$ exakt. Desweiteren ist $\Gamma(U_\sigma, -)$ linksexakt und somit ist für alle $p \geq 0$ und alle $\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p$ die Sequenz $0 \to \Gamma(U_\sigma, \mathscr{F}) \to \Gamma(U_\sigma, \mathscr{J}^0)$ bzw. die induzierte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^p(\mathscr{J}^0)) \\
 & & \| & & \| \\
0 & \longrightarrow & \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{F}(U_\sigma) & \longrightarrow & \prod_{\sigma \in \mathrm{N}(\mathscr{U})_p} \mathscr{J}^0(U_\sigma)
\end{array} \tag{2.3.2}$$

exakt.

Betrachte nun das kommutative Diagramm (2.3.3).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{F}) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{J}^0) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{J}^1) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{J}^2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{C}^0(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^0(\mathscr{J}^0)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^0(\mathscr{J}^1)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^0(\mathscr{J}^2)) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{C}^1(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^1(\mathscr{J}^0)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^1(\mathscr{J}^1)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^1(\mathscr{J}^2)) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Gamma(X, \mathscr{C}^2(\mathscr{F})) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^2(\mathscr{J}^0)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^2(\mathscr{J}^1)) & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathscr{C}^2(\mathscr{J}^2)) & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{2.3.3}$$

Bis auf die erste, nicht-triviale Zeile $\Gamma(X, 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^*)$ ist gemäß (2.3.1) und (2.3.2) jede Zeile exakt. Weiterhin enthält die p-te Spalte offenbar den augmentierten Čech-Komplex

$$\begin{cases} \Gamma\big(X, 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{F})\big) & \text{falls } p = 0 \\ \Gamma\big(X, 0 \to \mathscr{J}^{p-1} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{J}^{p-1})\big) & \text{falls } p > 0 \end{cases}$$

Bis auf die erste, nicht-triviale Spalte $\Gamma(X, 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{F}))$ ist jede Spalte exakt, da für injektives $\mathscr{J}$ gemäß Proposition 2.2.1 der Čech-Komplex $\Gamma(X, 0 \to \mathscr{J} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{J}))$ exakt ist.

2.3.2 Lemma In einem Doppelkomplex $(A^{*,*})$ der Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{0,0} & \longrightarrow & A^{1,0} & \longrightarrow & A^{2,0} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{0,1} & \longrightarrow & A^{1,1} & \longrightarrow & A^{2,1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A^{0,2} & \longrightarrow & A^{1,2} & \longrightarrow & A^{2,2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

sind die Kohomologien $\mathrm{H}^r(A^{0,*})$ und $\mathrm{H}^r(A^{*,0})$ isomorph, falls alle Zeilen $A^{p,*}$ und alle Spalten $A^{*,q}$ für $p, q \geq 1$ exakt sind. †

Offenbar erfüllt (2.3.3) genau die Voraussetzungen von Lemma 2.3.2 und es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^r(X, \mathscr{F}) &= \mathrm{H}^r\Big(\Gamma(X, 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{J}^*)\Big) \\ &= \mathrm{H}^r\Big(\Gamma\big(X, 0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{C}^*(\mathscr{F})\big)\Big) = \check{\mathrm{H}}^r(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt Theorem 2.3.1 mit Hilfe unserer anfänglichen Überlegungen direkt aus Lemma 2.3.2.

Beweis (Lemma 2.3.2): Für festes $p \geq 0$ und $0 \leq r \leq p$ konstruieren wir induktiv Abbildungen

$$\phi^r\colon \ \ker\left(\begin{array}{ccc} A^{p-r,r} & & \\ \downarrow & & \\ A^{p-r,r+1} & \longrightarrow & A^{p-r+1,r+1} \end{array}\right) \to \mathrm{H}^p(A^{*,0})$$

so, dass

$$\operatorname{im}\left(\begin{array}{c} A^{p-r,r-1} \\ \downarrow \\ A^{p-r,r} \end{array}\right) + \operatorname{im}\Big(\ A^{p-r-1,r} \longrightarrow A^{p-r,r}\ \Big) \subset \ker(\phi^r) \tag{2.3.4}$$

Für $r = 0$ ist

$$\ker\begin{pmatrix} A^{p,0} & \\ \downarrow & \\ A^{p,1} \longrightarrow & A^{p+1,1} \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} & 0 \\ & \downarrow \\ A^{p,0} \longrightarrow & A^{p+1,0} \\ & \downarrow \\ & A^{p+1,1} \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} A^{p,0} \longrightarrow A^{p+1,0} \end{pmatrix}$$

Dabei gilt die rechte Gleichheit, da die Spalte $p+1$ nach Voraussetzung exakt ist. Also können wir ϕ^0 einfach als Projektion $\ker\left(A^{p,0} \to A^{p+1,0}\right) \to \mathrm{H}^p(A^{*,0})$ wählen.

Für $p \geq r > 0$ betrachte ein $x \in \ker(A^{p-r,r} \to A^{p-r,r+1} \to A^{p-r+1,r+1})$ und folgendes, kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
 & x'' \arrow[d, mapsto] \arrow[r, phantom, "\in"] & A^{p-r+1,r-1} \arrow[dd] & & \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\in"] & x' \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] \arrow[r, phantom, "\in"] & & 0 \arrow[r, phantom, "\in"] & \\
A^{p-r,r} \arrow[rr] \arrow[dd] & 0 \arrow[dr, phantom, "\in"] & A^{p-r+1,r} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A^{p-r+2,r} \\
 & & & & \\
A^{p-r,r+1} \arrow[rr] & & A^{p-r+1,r+1} & &
\end{tikzcd}$$

Das Bild x' von x unter der horizontalen Abbildung $A^{p-r,r} \to A^{p-r+1,r}$ liegt offenbar im Kern der vertikalen Abbildung $A^{p-r+1,r} \to A^{p-r+1,r+1}$. Da die Spalte $p - r + 1$ exakt ist, finden wir ein Urbild x'' von x' unter der vertikalen Abbildung $A^{p-r+1,r-1} \to A^{p-r+1,r}$. Nach Konstruktion von x'' ist $x'' \in \ker\left(A^{p-r+1,r-1} \to A^{p-r+1,r} \to A^{p-r+2,r}\right)$ und wir definieren ϕ^r durch

$$x \mapsto \phi^{r-1}(x'')$$

Diese Vorschrift ergibt in der Tat einen wohldefinierten Homomorphismus, da x'' bis auf $\mathrm{im}\left(A^{p-r+1,r-2} \to A^{p-r+1,r-1}\right) = \ker\left(A^{p-r+1,r-1} \to A^{p-r+1,r}\right)$ wohldefiniert ist und linear von x abhängt. Weiterhin ist offensichtlich, dass ϕ^r die Bedingungen (2.3.4) erfüllt – zum einen weil $x'' = x' = 0$ für $x \in \mathrm{im}\left(A^{p-r-1,r} \to A^{p-r,r}\right)$ und zum anderen weil $x'' \in \mathrm{im}\left(A^{p-r,r-1} \to A^{p-r+1,r-1}\right) \subset \ker(\phi^{r-1})$ für $x \in \mathrm{im}\left(A^{p-r,r-1} \to A^{p-r,r}\right)$. Damit ist die Konstruktion der ϕ^r abgeschlossen.

Für $r = p$ erhalten wir insbesondere eine Abbildung ϕ^p

$$\phi^p\colon \ker\left(\begin{array}{ccc} & A^{0,p} & \\ & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & A^{0,p+1} & \longrightarrow A^{1,p+1}\end{array}\right) = \ker\left(\begin{array}{c} A^{0,p} \\ \downarrow \\ A^{0,p+1}\end{array}\right) \longrightarrow \mathrm{H}^p(A^{0,*})$$

mit

$$\mathrm{im}\left(\begin{array}{c} A^{0,p-1} \\ \downarrow \\ A^{0,p}\end{array}\right) + \mathrm{im}\left(\;0 \longrightarrow A^{0,p}\;\right) \subset \ker(\phi^p)$$

Somit induziert ϕ^p einen Morphismus $\phi\colon \mathrm{H}^p(A^{0,*}) \to \mathrm{H}^p(A^{*,0})$. Vollkommen symmetrisch erhält man Abbildungen $\psi\colon \mathrm{H}^p(A^{*,0}) \to \mathrm{H}^p(A^{0,*})$ und diese beiden Konstruktionen sind zueinander invers. ■

2.4 Garbenkohomologie von projektiven Schemata. Wir wollen nun als Abschluss mit Hilfe unserer bisherigen Anstrengungen folgenden Satz aus [Ser55] beweisen.

2.4.1 Theorem (Serre) Sei X ein projektives Schema über einem noetherschen Ring A und sei $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample, invertierbare Garbe auf X über Spec A. Weiter sei $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X. Dann gilt

(a) Die Kohomologie $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F})$ ist für alle $p \geq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul.

(b) Es gibt ein $n_0 = n_0(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $p > 0$ und alle $n \geq n_0$ die Kohomologie $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}(n))$ verschwindet. †

Beweis: Da $\mathcal{O}_X(1)$ eine sehr ample, invertierbare Garbe ist, wissen wir, dass es für ein geeignetes $r \geq 1$ eine abgeschlossene Einbettung $i\colon X \to \mathbb{P}^r(A)$ mit $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r(A)}$ gibt. Insbesondere ist $i_*\mathcal{F}$ kohärent über $\mathbb{P}^r(A)$ und es gilt $\mathrm{H}^*(X, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^*(\mathbb{P}^r(A), i_*\mathcal{F})$[6].

Wir können also ohne Einschränkung $X = \mathbb{P}^r(A)$ annehmen. In diesem Fall folgen beide Behauptungen für Garben der Form $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(n)$ und endlicher, direkter Summen $\mathcal{F} = \bigoplus_i \mathcal{O}_X(n_i)$ aus den Berechnungen, die wir in Nr. 1.4 vorgenommen haben.

Da $X = \mathbb{P}^r(A)$ sich durch $r+1$ affine, offene Mengen überdecken lässt, ist $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $p > r$ und alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$. Insbesondere ist für alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$ und alle $p > r$ die Kohomologie $\mathrm{H}^p(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugt.

Sei nun $q \leq r$ eine ganze Zahl, so dass (a) für alle $p > q$ und alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$ gilt. Für eine beliebige – aber feste – kohärente Garbe $\mathcal{F}$ existiert ein n, so dass $\mathcal{F}(n)$ von endlich vielen globalen Schnitten erzeugt ist. Dann lässt sich $\mathcal{F}(n)$ als Quotient

$$\underbrace{\bigoplus_{<\infty} \mathcal{O}_X}_{=\mathcal{E}(n)} \to \mathcal{F}(n) \to 0$$

[6] Für Details siehe [Har77], II.5.16.1, Exercise II.5.5 und III.2.10 oder [Ser55] n° 39

schreiben. Wir twisten diese Sequenz um $-n$ und bezeichnen den ebenfalls kohärenten Kern mit $\mathscr{K}$. Betrachte die lange, exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{E}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathscr{K}) \to \cdots$$

der kurzen, exakten Sequenz $0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$. Es ist $q+1 > q$ und nach Voraussetzung $\mathrm{H}^{q+1}(X, \mathscr{K})$ somit endlich erzeugt. Weiterhin ist $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{E})$ als endliche Summe von endlich erzeugten A-Moduln $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{O}_X(n))$ ebenfalls endlich erzeugt. Da A noethersch ist, ist jeder endlich erzeugte Modul M über A noethersch. Somit sind $\mathrm{im}(\partial)$, $\ker(\partial)$ und insbesondere $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n_0)) = \partial^{-1}(\mathrm{im}(\partial)) + \ker(\partial)$ ebenfalls endlich erzeugt und (a) folgt mit absteigender Induktion nach q.

Wähle nun ein $n_{\mathscr{E}}$, so dass $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}(n_{\mathscr{E}})) = 0$ für alle $p \geq 1$. Seien weiter $q \geq 1$ und $n_{\mathscr{K}}$ ganze Zahlen, so dass $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{K}(n_{\mathscr{K}})) = 0$ für alle $p > q$. Wir betrachten für $n_0 = \max(n_{\mathscr{E}}, n_{\mathscr{K}})$ die lange, exakte Sequenz

$$\cdots \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{E}(n_0)) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n_0)) \to \mathrm{H}^{q+1}(X, \mathscr{K}(n_0)) \to \cdots$$

der kurzen, exakten Sequenz $0 \to \mathscr{K}(n_0) \to \mathscr{E}(n_0) \to \mathscr{F}(n_0) \to 0$. Nach Wahl von n_0 ist $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{E}(n_0)) = 0$ für alle $p \geq 1$ und nach Wahl von n_0 und q ist $\mathrm{H}^{q+1}(X, \mathscr{K}(n_0)) = 0$. Offenbar ist dann auch $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}(n_0)) = 0$. Nun folgt (b) mit Induktion nach q, da $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{F}) = 0$ für alle kohärenten Garben $\mathscr{F}$ auf X und alle $p > r$. ■

Literatur

[Bre97] G.E. Bredon. *Sheaf theory*, volume 170 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1997.

[Con] Brian Conrad. Cech cohomology and alternating cochains. `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/cech.pdf`.

[God58] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, volume 1252 of *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, 1958.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.

[May67] J.P. May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Chicago lectures in mathematics. University of Chicago Press, 1967.

[Ser55] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *The Annals of Mathematics*, 61(2):197–278, 1955.

[Wei95] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1995.