Hilbertpolynom eines $k[x_0, \dots x_n]$-Moduls

Definition. — Es sei k ein Körper. Die „Hilbertfunktion" eines endlich erzeugten $k[x_0, \dots x_n]$-Moduls, M, ist

$$\phi_M : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}, \phi_M(t) = \dim_k M_t.$$

Satz ((Har77, Ch. I, Thm. 7.5, p. 51)). — *Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Für jeden endlich erzeugten, $\boldsymbol{Z}$-graduierten $k[x_0, \dots x_n]$-Modul, M, existiert genau ein Polynom $P_M \in \boldsymbol{Q}[z]$, mit der Eigenschaft, daß $P_M \sim \phi_M$, sein „Hilbertpolynom". Überdies entspricht der Grad des Hilbertpolynoms von M der Dimension von $V(\operatorname{ann}(M))$.*

Proposition ((Har77, Ch. I, Prop. 7.3., p. 49)). — *(a) Ist die Differenzfunktion, $\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$, einer Funktion $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ „approximiert" durch ein rationales Polynom, Q, viz. $\Delta f(t) = Q(t)$ für alle $t \gg 0, t \in \boldsymbol{Z}$, i.Z. $Q \sim \Delta f$, so existiert ein rationales Polynom P, das f approximiert. Überdies ist $\deg P = \deg Q + 1$.*

(b) Sind P und Q zwei Polynome, die die selbe Funktion $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$ approximieren, so gilt $P = Q$.

Proposition ((Har77, Ch. I, Prop. 7.4., p. 50)). — *Jeder endlich erzeugte, $\boldsymbol{Z}$-graduierte Modul, M, über einem Noetherschen, kommutativen, unitalen, $\boldsymbol{Z}$-graduierten Ring, S, ist einer Filtration*

$$(0) = M^0 \subseteq \dots M^r = M$$

von der Gestalt, daß Zahlen $t_1, \dots t_r$ und homogene Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_r$ existieren, für die $M^i/M^{i-1} = (S/\mathfrak{p}_i)(t_i)$ gilt, fähig.

Satz ((Har77, Ch. I, Thm. 7.2., p. 48)). — *Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sind X und Y Varietäten der Dimension r resp. s in $\boldsymbol{P}^n(k)$, so hat jede irreduzible Komponente von $X \cap Y$ die Dimension $\geq r+s-n$. Überdies ist $X \cap Y$ nicht leer, falls $r + s - n \geq 0$.*

Eulercharakteristik und Hilbertpolynom kohärenter $\mathcal{O}_X$-Moduln

Satz (J.P. Serre, cf. (Har77, Ch. III, Thm. 5.2, p. 228)). — *Es sei X ein projektives Schema über einem kommutativen, unitalen, Noetherschen Ring, A, und $\mathcal{O}_X(1)$ ein (bezüglich A) sehr weitläufiger, invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul.*

(a) *Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathcal{F}$, und jedes $i \geq 0$ ist (der A-Modul) $H^i(X, \mathcal{F})$ endlich erzeugt.*

(b) *Für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathcal{F}$, existiert eine Zahl t_0 von der Gestalt, daß $H^i(X, \mathcal{F}(t)) = 0$ für alle $i \geq 1$ und $t \geq t_0$ gilt.*

Definition. — Es sei k ein Körper. Die „Eulercharakteristik" eines kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduls, $\mathcal{F}$, über einem projektiven k-Schema, X, ist

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F}).$$

Satz ((Har77, Ch. III, Ex. 5.2, p. 230), Hauptsatz)**.** — *Es sei k ein Körper.*

(a) *Ist X ein projektives Schema über k, $\mathcal{O}_X(1)$ einen (bezüglich k) sehr weitläufiger, invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul auf X, so gibt es genau ein Polynom $P_{\mathcal{F}} \in \boldsymbol{Q}[z]$ von der Gestalt, daß $P_{\mathcal{F}}(t) = \chi(X, \mathcal{F}(t))$ für alle $t \in \boldsymbol{Z}$, das sog. „Hilbertpolynom" von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{O}_X(1)$. Überdies entspricht der Grad von $P_{\mathcal{F}}$ der Dimension von* $\operatorname{supp} \mathcal{F}$.

(b) *Ist k algebraisch abgeschlossen, so entspricht das Hilbertpolynom jedes kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduls über $\boldsymbol{P}^n_k$, sagen wir $\mathcal{F}$, dem Hilbertpolynom von $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{t \in \boldsymbol{Z}} \Gamma(X, \mathcal{F}(t))$.*

Beweis des Hauptsatzes

Definition. — Ein Modul, M, über einem kommutativen, unitalen Ring, A, heißt „flach", falls $M \otimes_A -$ exakt ist. Eine kommutative, unitale A-Algebra heißt „flach", wenn der ihr zugrundeliegende Modul flach ist über A.

Proposition ((Har77, Ch. III, Prop. 9.1A, p. 253f))**.** — *Es sei A ein kommutativer, unitaler Ring.*

(1) *Ein A-Modul, M, ist genau dann flach, falls für jedes endlich erzeugte Ideal $\mathfrak{A} \subseteq A$ die Abbildung $\mathfrak{A} \otimes_A M \to M$ injektiv ist.*

(2) *Ist M flach über A und A' eine kommutative, unitale A-Algebra, so ist $M \otimes_A A'$ flach über A'.*

(3) *Ist A' eine kommutative, unitale, flache A-Algebra und M ein flacher A'-Modul, so ist der Modul $M|_A$ flach über A.*

(4) Ein A-Modul ist genau dann flach, wenn für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ *gilt, daß* $M_\mathfrak{p}$ *flach ist über* $A_\mathfrak{p}$.

(6) Ist A Noethersch, so ist jeder endlich erzeugte Modul dann und nur dann flach, wenn er frei ist.

Definition. — Es sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Die Abbildung $f^\sharp : \mathcal{O}_{f(x),Y} \to \mathcal{O}_{x,X}$ verwandelt $\mathcal{F}_x$, den Halm eines $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$, in einen $\mathcal{O}_{f(x),Y}$-Modul. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathcal{F}$, heißt „flach über Y in x", falls $\mathcal{F}_x$ flach über $\mathcal{O}_{f(x),Y}$ ist. Er heißt „flach", wenn er in allen Punkten von X flach über Y ist.

Der Morphismus f heißt „flach", falls $\mathcal{O}_X$ (via f) flach ist über Y, und er heißt „treuflach", falls f zusätzlich eine Surjektion ist.

Proposition ((Har77, Ch. III, Prop. 9.2, p. 254)). — *(1') Offene Immersionen sind flach.*

(2') Sind $f : X \to Y$ *ein Schemamorphismus,* $\mathcal{F}$ *ein* $\mathcal{O}_X$*-Modul, der über* Y *flach ist, und* $u : Y' \to Y$ *ein Schemamorphismus, sowie* $g : Y' \times_Y X \to Y'$ *und* $v : Y' \times_Y X \to X$ *die natürlichen Abbildungen, so ist* $v^*\mathcal{F}$ *flach über* Y' *(via* g*).*

(3') Sind $f : X \to Y$ *und* $g : Y \to Z$ *Schemamorphismen,* $\mathcal{F}$ *ein* $\mathcal{O}_X$*-Modul, der über* Y *flach ist, und ist* g *flach, so ist* $\mathcal{F}$ *flach über* Z.

(4') Sind A ein kommutativer, unitaler Ring und A' *eine kommutative, unitale A-Algebra sowie M ein* A'*-Modul, so ist* $\widetilde{M}$ *genau dann flach über* $\operatorname{Spec} A$ *(via* $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$*), falls M flach ist über A.*

(6') Ein kohärenter $\mathcal{O}_X$*-Modul eines Noetherschen Schemas ist dann und nur dann flach, wenn er lokal frei ist.*

Proposition ((Har77, Ch. III, Prop. 9.3, p. 255, Cor. 9.4, p. 255f)). — *Sind* Y, Y' *und* X *Noethersche Schemata,* $f : X \to Y$ *ein separierter Schemamorphismus endlichen Typs,* $u : Y' \to Y$ *ein Schemamorphismus:*

$$\begin{tikzcd} Y' \times_Y X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y, \end{tikzcd}$$

sowie $\mathcal{F}$ *eine quasikohärente Garbe über* X*, so gilt:*

(a) *Es existiert für jedes* $i \geq 0$ *ein natürlicher Morphismus* $u^* R^i f_*(\mathcal{F}) \to R^i g_*(v^* \mathcal{F})$*; über affinen Schemata,* $Y' = \operatorname{Spec} A'$ *und* $Y = \operatorname{Spec} A$*, ist diese Abbildung bewirkt durch natürliche Morphismen* $H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_A A' \to H^i(Y' \times_Y X, v^* \mathcal{F})$.

(b) *Ist* u *flach, so ist* $u^* R^i f_*(\mathcal{F}) \to R^i g_*(v^* \mathcal{F})$ *ein Isomorphismus.*

(c) *Ist* Y *affin und* $k(y)$ *der Restklassenkörper von* y *bzw. die konstante Garbe auf* $\overline{\{y\}}$*, sowie* $X_y = \operatorname{Spec} k(y) \times_Y X$ *die Faser von* f *über* y *und* $\mathcal{F}_y$ *die von* $X_y \to X$ *induzierte Garbe, so gibt es für alle* $i \geq 0$ *und alle* $y \in Y$ *einen natürlichen Isomorphismus* $H^i(X_y, \mathcal{F}_y) = H^i(X, \mathcal{F} \otimes k(y))$.

Proposition. — *Sind* k *ein Körper und*

$$(0) \to \mathcal{F}_0 \to \ldots \mathcal{F}_n \to (0)$$

eine exakte Sequenz kohärenter $\mathcal{O}_X$*-Moduln über einem projektiven* k*-Schema, so ist*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi(X, \mathcal{F}_i) = 0.$$

Definition. — Ein Punkt, x, eines Schemas, X, heißt „assoziierter Punkt" des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$, falls für jedes $f \in \mathfrak{M}_x$ die Abbildung $\times f : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ *nicht* injektiv ist.

Proposition. — *Es sei* X *ein projektives* k*-Schema,* $\mathcal{O}_X(1)$ *ein (bzgl.* k*) sehr weiterläufiger, invertierbarer* $\mathcal{O}_X$*-Modul und* $\mathcal{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul.*

(a) *Die Menge der assoziierten Punkte von* $\mathcal{F}$ *ist endlich.*

(b) *Für jedes* $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}_k^n}(1))$ *ist* $\times f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(1)$ *genau dann injektiv, falls* $\{f = 0\}$ *alle assoziierten Punkte von* $\mathcal{F}$ *vermeidet.*

Literatur

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1977.