Hilbertschemata und Flachheit

Michael Fütterer

3. Februar 2012

1 Projektive Bündel

In Analogie zu Vektorbündeln definiert man:

Definition 1.1: Ein *projektives Bündel* von Rang n über einem Schema X ist ein Morphismus $f\colon E \longrightarrow X$, so dass eine offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von X existiert, die $f^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{P}^n$ erfüllt, und so, dass die induzierten Automorphismen von $A[x_0, \dots, x_n]$ auf affinen Stücken $V = \operatorname{Spec} A \subseteq U_i \cap U_j$ linear sind.

Es sei X ein noethersches Schema und $\mathcal{S}$ eine quasikohärente Garbe von graduierten $\mathcal{O}_X$-Algebren, so dass $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{S}_1$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ist und so dass $\mathcal{S}$ lokal von $\mathcal{S}_1$ als $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$-Algebra erzeugt wird. Dann gibt es genau ein Schema $\operatorname{Proj} \mathcal{S}$ und einen Morphismus $f\colon \operatorname{Proj} \mathcal{S} \longrightarrow X$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes offene affine $V \subseteq X$ gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi_V\colon f^{-1}(V) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} \mathcal{S}(V).$$

(b) Für jede Inklusion $U \hookrightarrow V$ von offenen affinen $U, V \subseteq X$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_U"] & f^{-1}(V) \arrow[d, "\varphi_V"] \\
\operatorname{Proj} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "(\cdot|^V_U)^\sharp"] & \operatorname{Proj} \mathcal{A}(V)
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Es kann konstruiert werden durch Verkleben der $\operatorname{Proj} \mathcal{S}(V)$ für offene affine $V \subseteq X$.

Lemma 1.2: *Für eine lokal freie Garbe $\mathcal{A}$ von Rang $n+1$ auf X sei $S(\mathcal{A})$ die symmetrische Algebra auf X. Wir setzen $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = \operatorname{Proj} S(\mathcal{A})$. Dann ist $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \longrightarrow X$ ein projektives Bündel von Rang n auf X.*

Genaueres über Vektorbündel, projektive Bündel und die oben beschriebene Konstruktion findet man in [Har77], Ex. II.5.17 (c), Ex. II.5.18, §II.7, Abschnitt „Proj, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, and Blowing Up“, und Ex. II.7.10.

2 Das Grassmann-Schema als Hilbertschema

Das Grassmann-Schema $G(n,d)$ parametrisiert d-dimensionale Untervektorräume von k^n. Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper k kann man $G(n,d)$ als projektive Varietät konstruieren und anschließend das zugehörige Schema betrachten: siehe [WS10, §II.6]. Für $k = \mathbb{R}$ oder $k = \mathbb{C}$ kann man $G(n,d)$ als Mannigfaltigkeit konstruieren, siehe [GH78, §1.5], wo auch die geometrische Motivation der nun folgenden Beschreibung erklärt ist. Diese Konstruktion wird in [Nit05, §1] für $k = \mathbb{Z}$ algebro-geometrisch nachgeahmt, funktioniert aber im Grunde für jeden kommutativen Ring k.

Im folgenden sei mit E die $d \times d$-Einheitsmatrix bezeichnet. Für eine Menge $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ mit $\#I = d$ und eine $d \times n$-Matrix A bezeichne A_I den I-ten Minor von A, also die $d \times d$-Teilmatrix, deren Einträge die I-ten aus A sind. Es sei $X^{(I)}$ eine $d \times n$-Matrix mit $X^{(I)}_I = E$ und deren restliche Einträge algebraisch unabhängige Variablen sind. Sei $U_I = \operatorname{Spec} k[X^{(I)}]$ (was zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ isomorph ist) und für eine weitere d-elementige Teilmenge $J \subseteq \{1,\dots,n\}$ sei $R_I^J = k[X^{(I)}, 1/\det X^{(I)}_J]$ und $U_I^J = \operatorname{Spec} R_I^J$ das offene Unterschema von U_I, wo der J-te Minor invertierbar ist. Weiter definieren wir Ringhomomorphismen

$$\theta_{I,J}\colon R_J^I \longrightarrow R_I^J, \quad X^{(J)} \longmapsto (X^{(I)}_J)^{-1} X^{(I)}.$$

Das Schema, das entsteht, wenn man die affinen Stücke U_I an den Teilen U_I^J via der Ringhomomorphismen $\theta_{I,J}$ zusammenklebt, sei mit $G(n,d)$ bezeichnet und heißt *Grassmann-Schema.*

Auf den affinen Stücken U_I definieren wir einen surjektiven Garbenmorphismus

$$u_I\colon \bigoplus_n \mathcal{O}_{U_I} \longrightarrow \bigoplus_d \mathcal{O}_{U_I}$$

durch die Matrix $X^{(I)}$. Diese verkleben wir, kompatibel mit den $\theta_{I,J}$, auf der Bildgarbe durch $(X^{(I)}_J)^{-1}$ zu einem surjektiven Morphismus

$$u\colon \bigoplus_n \mathcal{O}_{G(n,d)} \longrightarrow \mathcal{U}.$$

Wir nennen $\mathcal{U}$ das *universelle* oder *tautologische Bündel* auf $G(n,d)$. Von u wird eine Einbettung von Schemata

$$\mathbb{P}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathbb{P}(\bigoplus_n \mathcal{O}_{G(n,d)}) = \mathbb{P}^{n-1}_{G(n,d)} = \mathbb{P}^{n-1} \times G(n,d)$$

induziert. Da u surjektiv ist, ist $\mathbb{P}(\mathcal{U})$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}^n \times G(n,d)$.

Satz 2.1: *Für das Polynom $p(t) = \binom{d+t}{d}$ ist $G(n+1,d+1)$ das Hilbertschema Hilb^p_n. Die universelle Familie ist*

$$\pi\colon \mathbb{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow G(n+1,d+1).$$

Beweis: [ACG11, Bsp. 9.2.6]

3 Flachheit

In diesem Abschnitt sei stets S ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^r \times S$, und

$$\pi\colon \mathbb{P}^r \times S \longrightarrow S$$

die Projektion. Für $s \in S$ sei $k(s)$ der Restklassenkörper bei s. Für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^r \times S$ und $s \in S$ sei $\mathcal{F}_s$ die induzierte Garbe auf der Faser $\pi^{-1}(s)$.

Satz 3.1: *$\mathcal{F}$ ist genau dann flach über S, wenn $\pi_*(\mathcal{F}(n))$ lokal frei ist für $n \gg 0$.*

Beweis: [ACG11], Kap. 9, Prop. 2.5 und Lemma 3.3 mit folgendem Absatz.

Lemma 3.2: *Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $s \in S$ und alle $n \geq n_0$ gilt:*

(a) Die natürliche Abbildung $\pi_*\mathcal{F}(n) \otimes k(s) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n))$ ist ein Isomorphismus.

(b) $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n)) = 0$ für alle $q > 0$.

Beweis: [ACG11, Lemma 9.3.6]

Definition 3.3: Ein *Jacobson-Ring* ist ein kommutativer Ring, in dem jedes Primideal ein Schnitt von maximalen Idealen ist.

Lemma 3.4: *Sei A ein reduzierter kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ sei $k(\mathfrak{p})$ der Restklassenkörper bei $\mathfrak{p}$:*

$$k(\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} \big/ \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathrm{Quot}\left(A \big/ \mathfrak{p}\right).$$

Es sind äquivalent:

(i) M ist projektiv.

(ii) Die Dimension von $M \otimes k(\mathfrak{p})$ als $k(\mathfrak{p})$-Vektorraum ist lokal konstant auf $\mathrm{Spec}(A)$.

Wenn A ein Jacobson-Ring ist, dann sind (i) und (ii) auch äquivalent zu

(iii) Die Dimension von $M \otimes k(\mathfrak{p})$ als $k(\mathfrak{p})$-Vektorraum ist lokal konstant auf $\mathrm{MaxSpec}(A)$.

Beweis: [ACG11, Lemma 9.3.7]

Satz 3.5: *(a) Wenn $\mathcal{F}$ flach über S ist, ist das Hilbert-Polynom $h_{\mathcal{F}_s}(t)$ lokal konstant als Funktion von $s \in S$.*

(b) Wenn S reduziert ist, gilt in (a) die Umkehrung. Es reicht sogar, dass $h_{\mathcal{F}_s}(t)$ lokal konstant auf den abgeschlossenen *Punkten von S ist.*

Beweis: [ACG11, Prop. 9.3.5]

Literatur

[ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba und Philipp Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves, Volume II. With a contribution by Joseph Daniel Harris.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.

[GH78] Phillip Griffiths und Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience publication. New York: John Wiley & Sons, 1978.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Bd. 52. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1977.

[Nit05] Nitin Nitsure. „Construction of Hilbert and Quot schemes“. In: Barbara Fantechi u. a. *Fundamental algebraic geometry. Grothendieck's FGA explained.* Mathematical surveys and monographs, 123. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2005, S. 105–137. URL: `http://ncatlab.org/nlab/show/FGA+explained`.

[WS10] Gabriela Weitze-Schmithüsen. „Algebraische Geometrie I“. Vorlesungsskript. 2010.