Flachheit und getwistete Garben

Anja Randecker im Seminar „Modulprobleme“

23. Februar 2012

In diesem Vortrag werden wir häufig einen Basiswechsel der folgenden Form betrachten:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^r \times T \arrow[r, "g = \mathrm{id} \times f"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathbb{P}^r \times S \arrow[d, "\sigma"] \\ T \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Dabei sind S und T Schemata, $f\colon T \to S$ ein Schemamorphismus und $\sigma\colon \mathbb{P}^r \times S \to S$ und $\tau\colon \mathbb{P}^r \times T \to T$ die Projektionen.

Proposition (Flachheit und lokale Freiheit). *Sei S ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^r \times S$ und σ die Projektion von $\mathbb{P}^r \times S$ auf S. Dann gilt:*

$\mathcal{F}$ ist flach über S genau dann, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sigma_*(\mathcal{F}(n))$ lokal frei ist für $n \geq n_0$.

Proposition (Kohomologie-Aussagen für flache Garben). *Sei S ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^r \times S$ und σ die Projektion von $\mathbb{P}^r \times S$ auf S. Ist $\mathcal{F}$ flach über S, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $R^q \sigma_* \mathcal{F} = 0$ *für alle* $q > 0$,

(ii) $R^q \tau_* g^* \mathcal{F} = 0$ *für jeden Basiswechsel und alle* $q > 0$,

(iii) $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s) = 0$ *für jedes* $s \in S$ *und alle* $q > 0$,

(iv) $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s) = 0$ *für jeden abgeschlossenen Punkt* $s \in S$ *und alle* $q > 0$.

Ist eine der Aussagen (i) bis (iv) erfüllt, so ist außerdem $\sigma_* \mathcal{F}$ frei und die natürlichen Homomorphismen

$$f^* \sigma_* \mathcal{F} \to \tau_* g^* \mathcal{F}, \quad \sigma_* \mathcal{F} \otimes k(s) \to H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s)$$

sind für jeden Basiswechsel und jedes $s \in S$ Isomorphismen. Dabei soll $\mathcal{F}_s := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)}$ als Garbe auf $\mathbb{P}^r$ aufgefasst werden.

Lemma. *Sei S ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^r \times S$ und σ die Projektion von $\mathbb{P}^r \times S$ auf S. Sei $f\colon T \to S$ ein Schemamorphismus, τ die Projektion von $\mathbb{P}^r \times T$ auf T und $g \coloneqq \mathrm{id} \times f\colon \mathbb{P}^r \times T \to \mathbb{P}^r \times S$.*

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq n_0$ gilt:

(i) Die natürliche Abbildung $f^*\sigma_*\mathcal{F}(n) \to \tau_* g^*\mathcal{F}(n)$ ist ein Isomorphismus.

(ii) $R^q\tau_*g^*\mathcal{F}(n) = 0$ für jedes $q > 0$.

Beweis. Da Teil (i) eine Aussage über Isomorphie macht, die halmweise und damit lokal überprüfbar ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass es endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebren A, B gibt mit $S = \operatorname{Spec} A$, $T = \operatorname{Spec} B$. Also gibt es auch einen Ringhomomorphismus $f'\colon A \to B$, der f induziert.

Wir definieren die A- bzw. B-Algebren

$$R_A \coloneqq A[X_0, \ldots, X_r] \quad \text{und} \quad R_B \coloneqq B[X_0, \ldots, X_r],$$

wobei $X_0, \ldots, X_r$ Variablen sein sollen. Dann gilt (via dem Ringhomomorphismus $\mathbb{C} \to A$; siehe [Har], Seite 103)

$$\operatorname{Proj} R_A = \operatorname{Proj} A[X_0, \ldots, X_r] = \operatorname{Proj} \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_r] \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{C}} \operatorname{Spec} A = \mathbb{P}^r \times S,$$

ebenso $\operatorname{Proj} R_B = \mathbb{P}^r \times T$ und weiterhin $R_B = R_A \otimes_A B$ (Koeffizientenerweiterung von R_A via f').

Nach einem Satz von Serre ([Ser], Abschnitte 59 und 65) entspricht der Garbe $\mathcal{F}$ ein graduierter R_A-Modul $F = \bigoplus F_n$ mit $\mathcal{F} = \widetilde{F}$ und $F_n = H^0(\mathbb{P}^r \times S, \mathcal{F}(n))$ für große n. Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} H^0(S, \sigma_*(\mathcal{F}(n))) &= (\sigma_*(\mathcal{F}(n)))(S) = \mathcal{F}(n)(\sigma^{-1}(S)) \\ &= \mathcal{F}(n)(\mathbb{P}^r \times S) = H^0(\mathbb{P}^r \times S, \mathcal{F}(n)) = F_n \end{aligned}$$

gilt für große n und damit $\sigma_*(\mathcal{F}(n)) = \widetilde{F_n}$ für große n, da S affin ist. Daraus folgt $f^*\sigma_*\mathcal{F}(n) = f^*\widetilde{F_n} = \widetilde{F_n \otimes_A B}$ für große n (siehe Vorlesung oder Bennis Vortrag bzw. [Har], Prop. II.5.2 (e)).

Für die inverse Bildgarbe $g^*\mathcal{F}$ können wir analog zum Affinen (benutze affine Überdeckung) folgern

$$g^*\mathcal{F} = g^*\widetilde{F} = \widetilde{F \otimes_{R_A} R_B} = \widetilde{F \otimes_{R_A} (R_A \otimes_A B)} = \widetilde{(F \otimes_{R_A} R_A) \otimes_A B} = \widetilde{F \otimes_A B}.$$

Insbesondere gilt analog zu oben $\tau_*g^*\mathcal{F}(n) = (\widetilde{F \otimes_A B})_n = \widetilde{F_n \otimes_A B}$ für große n.

Damit gilt $f^*\sigma_*\mathcal{F}(n) = \widetilde{F_n \otimes_A B} = \tau_*g^*\mathcal{F}(n)$ für große n (wähle dafür das Maximum der zwei unteren Schranken als untere Schranke).

Teil (ii) folgt aus dem Verschwindungssatz von Serre, genauer aus Theorem III.8.8 c) in [Har]. $\square$

Proposition (Sards Lemma für Flachheit). *Sei X ein Schema, Y ein reduziertes Schema, $\alpha\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus und $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf X.*

Dann gibt es (bzgl. Zariski-Topologie) eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq Y$, so dass $\mathcal{F}_{|\alpha^{-1}(U)}$ flach über U ist.

Beweis. Da Flachheit lokal definiert ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass es endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebren A, B gibt, so dass $X = \operatorname{Spec} B$ und $Y = \operatorname{Spec} A$. Außerdem können wir ohne Einschränkung annehmen, dass Y irreduzibel, also A nullteilerfrei ist, da es genügt, die Aussage auf irreduziblen Komponenten zu beweisen. Der Garbe $\mathcal{F}$ entspricht ein endlich erzeugter B-Modul M, der via dem Ringhomomorphismus $\alpha'\colon A \to B$ auch ein A-Modul ist. Wegen Maltes Propositionen genügt es, zu zeigen, dass es ein $a \in A \setminus \{0\}$ gibt, so dass die Lokalisierung M_a ein freier A_a-Modul ist.

Wir zeigen, dass wir uns auf den Fall beschränken können, dass B nullteilerfrei und $M = B$ ist: Wir finden eine Normalreihe

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M,$$

so dass alle Quotienten M_i/M_{i-1} isomorph zu Moduln der Form B/p für ein Primideal p sind (siehe [Mat], Seite 51). Gibt es für die exakte Sequenz

$$0 \to M_{i-1} \to M_i \to M_i/M_{i-1} \to 0$$

Elemente $a, a' \in A$, so dass $(M_{i-1})_a$ frei über A_a und $(M_i/M_{i-1})_{a'}$ frei über $A_{a'}$ ist, dann ist $(M_i)_{aa'}$ frei über $A_{aa'}$. Also genügt es, die Quotienten M_i/M_{i-1} zu untersuchen und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $M = B/p = B$ für ein Primideal p ist, also B nullteilerfrei und $M = B$.

Zu zeigen ist also, dass es ein $a \in A \setminus \{0\}$ gibt, so dass B_a frei über A_a ist. Sei dazu K der Quotientenkörper von A und $B_K \coloneqq B \otimes_A K$. Wir führen eine Induktion über $d \coloneqq \dim \operatorname{Spec}(B_K)$ durch:

Im Fall $d = -1$ gilt $\operatorname{Spec}(B_K) = \emptyset$ und $B_K = \{0\}$. Dann ist $\alpha'\colon A \to B$ nicht injektiv, denn wegen der Flachheit von K als A-Modul wäre sonst $A \otimes_A K = K \to B_K = B \otimes_A K$ injektiv. Also gibt es ein Element $a \in A \setminus \{0\}$ im Kern von α'. Für dieses a gilt $B_a = \{0\}$, weil $\alpha(a) = 0$ im multiplikativen System enthalten ist, und damit ist B_a frei über A_a.

Sei jetzt $d \geq 0$. B_K ist eine endlich erzeugte K-Algebra, also gibt es nach Noethernormalisierung algebraisch unabhängige Elemente $b_1, \ldots, b_d \in B_K$, so dass B_K ganz über $K[b_1, \ldots, b_d]$ ist. Für die Bestimmung der Anzahl der algebraisch unabhängigen Elemente wird verwendet, dass ganze Ringerweiterungen die Dimension erhalten. Weiterhin gibt es $b_{d+1}, \ldots, b_n \in B_K$, so dass $B_K = K[b_1, \ldots, b_d, b_{d+1}, \ldots, b_n]$ gilt. Dabei wählen wir die $b_{d+1}, \ldots, b_n$ so, dass die Koeffizienten der annullierenden Polynome in A liegen (ziehe Hauptnenner der Koeffizienten in die b_i). Also gibt es ein $c \in A \setminus \{0\}$, so dass $b_1, \ldots, b_d \in B_c$ und so dass B_c ganz über $A_c[b_1, \ldots, b_d]$ ist (verwende ebenfalls „Hauptnenner“). Weil B_c ein endlich erzeugter $A_c[b_1, \ldots, b_d]$-Modul und $A_c[b_1, \ldots, b_d]$ ein nullteilerfreier Ring ist, finden wir eine exakte Sequenz

$$0 \to A_c[b_1, \ldots, b_d]^m \to B_c \to C \to 0$$

von $A_c[b_1,\dots,b_d]$-Moduln. Dabei wählen wir $m \in \mathbb{N}$ maximal (d.h. es gibt keine injektive Abbildung $A_c[b_1,\dots,b_d]^{m+1} \to B_c$), wodurch $B_c/(A_c[b_1,\dots,b_d]^m) = C$ ein Torsionsmodul wird (d.h. jedes Element aus C ist ein Torsionselement).

Weil $A_c[b_1,\dots,b_d]^m$ frei über A_c ist, genügt es mit demselben Argument wie oben, zu zeigen, dass es ein $a \in A \setminus \{0\}$ gibt, so dass C_a frei über A_{ca} ist. Ebenso genügt es mit dem Argument der Normalreihe den Fall zu betrachten, dass $C = A_c[b_1,\dots,b_d]/p$ gilt für ein Primideal $p \subseteq A_c[b_1,\dots,b_d]$. Da C aber ein Torsionsmodul über $A_c[b_1,\dots,b_d]$ ist, kann p nicht das Nullideal sein. Dann gibt es in $C_K := C \otimes_{A_c} K = K[b_1,\dots,b_d]/p'$ mit p' Bild von p in $K[b_1,\dots,b_d$ keine Primidealketten der Länge d, also ist die Dimension von $\operatorname{Spec}(C_K)$ echt kleiner d. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung für C ein $a \in A$ wie gefordert. $\square$

Lemma. *Sei S ein Schema, $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe auf $\mathbb{P}^r \times S$ und $\sigma\colon \mathbb{P}^r \times S \to S$ die Projektion. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Punkt $s \in S$ und jedes $n \geq n_0$ gilt:*

(i) Die natürliche Abbildung $\sigma_*\mathcal{F}(n) \otimes k(s) \to H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n))$ ist ein Isomorphismus.

(ii) $H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n)) = 0$ für $q > 0$.

Beweis. Wir definieren eine Folge von Unterschemata von S, so dass wir darauf Flachheit nutzen können: Sei $S_0 = S_{red}$ das reduzierte Unterschema mit $\iota\colon S_0 \hookrightarrow S$. Dabei gilt $S = S_0$ als topologische Räume. Wegen Sards Lemma gibt es dann eine dichte offene Teilmenge $T_1 \subseteq S_0$, so dass $\mathcal{F}$ (eigentlich $((\mathrm{id} \times \iota)^*\mathcal{F})_{|\tau^{-1}(T_1)}$ mit $\tau\colon \mathbb{P}^r \times S_0 \to S_0$ Projektion) flach über T_1 ist. Das Komplement von T_1, versehen mit der induzierten reduzierten Struktur, heiße S_1. Jetzt ziehen wir $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^r \times S_1$ zurück, wenden wieder Sards Lemma an, erhalten S_2 usw. Da S noethersch ist, erhalten wir eine endliche Kette

$$S_0 \supsetneq S_1 \supsetneq \cdots \supsetneq S_N \supsetneq S_{N+1} = \emptyset,$$

so dass die entsprechende Einschränkung des Pullbacks von $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{P}^r \times S_{i-1}$ flach über $T_i = S_{i-1} \setminus S_i$ ist.

Sei s jetzt ein Punkt von S. Dann gibt es genau ein i, so dass s Punkt von T_i ist. Wir wenden das erste Lemma auf $T = T_i$ und die Inklusion $f\colon T_i \hookrightarrow S$ an. Dann gibt es ein $n_{0,i}$, so dass $f^*\sigma_*\mathcal{F}(n) = \tau_* g^*\mathcal{F}(n)$ für $n \geq n_{0,i}$ gilt. Außerdem gilt $R^q\tau_*(g^*\mathcal{F}(n)) = 0$ für $n \geq n_{0,i}$ und jedes $q > 0$.

Es ist $g^*\mathcal{F}$ flach über T_i, also können wir mit der zweiten Proposition (von (i) auf (iii) und auf den letzten Absatz) folgern, dass $H^0(\mathbb{P}^r, (g^*\mathcal{F})_s(n)) = \tau_* g^*\mathcal{F}(n) \otimes k(s)$ und $H^q(\mathbb{P}^r, (g^*\mathcal{F})_s(n)) = 0$ für $q > 0$ und $n \geq n_{0,i}$ gilt.

Sei $n_0 := \max\{n_{0,i} : i = 0,\dots,N\}$. Dann folgt aus $(g^*\mathcal{F})_s = \mathcal{F}_s$ und

$$\sigma_*\mathcal{F}(n) \otimes k(s) = f^*\sigma_*\mathcal{F}(n) \otimes k(s) = \tau_* g^*\mathcal{F}(n) \otimes k(s)$$

für jedes $n \geq n_0$ und jedes $q > 0$:

$$H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n)) = \sigma_*\mathcal{F}(n) \otimes k(s) \quad \text{und} \quad H^q(\mathbb{P}^r, \mathcal{F}_s(n)) = 0.$$ $\square$

Lemma. *Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und $q(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für jede Idealgarbe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ mit Hilbertpolynom $q(t)$ und für jedes $n \geq n_0$ gilt:*

(i) $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) = 0$ für jedes $i > 0$.

(ii) Die natürliche Abbildung $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1))$ ist surjektiv.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über r.

Sei $r = 0$. Das einzige abgeschlossene Unterschema von $\mathbb{P}^0$ ist $\mathbb{P}^0$ und für die entsprechende Idealgarbe gilt $\mathcal{I} = (0)$.

Sei $r > 0$. Sei X das projektive Schema, durch das $\mathcal{I}$ definiert wird. Dann gibt es ein homogenes Ideal $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_r]$ mit $X = \operatorname{Proj} k[X_0, \ldots, X_r]/I$ und Primärzerlegung $I = \bigcap_{i=1}^m q_i$. Sei weiter H eine Hyperebene, die keines der Schemata $\operatorname{Proj} k[X_0, \ldots, X_r]/\sqrt{q_i}$, $i = 1, \ldots, m$, enthält, und $\mathcal{J} := \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}} \mathcal{O}_H$ (eigentlich $\mathcal{I} \otimes \iota_* \mathcal{O}_H$ für $\iota \colon H \to \mathbb{P}^r$; das werden wir aber im gesamten Beweis in ähnlichen Situationen stets unterdrücken).

$\mathcal{J}$ ist zunächst eine Garbe auf $\mathbb{P}^r$, wir wollen aber zeigen, dass $\mathcal{J}$ auch als Idealgarbe auf H gesehen werden kann: Dazu betrachten wir zur kurzen exakten Sequenz (siehe David)

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

die Linksableitungen des Funktors $\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}} \mathcal{O}_X$ und erhalten aus der induzierten langen exakten Sequenz den Ausschnitt

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}, \mathcal{O}_X) \to \operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathcal{O}_H, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X.$$

Da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ flach über $\mathbb{P}^r$ ist, ist $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}, \mathcal{O}_X) = 0$ (siehe [Eis], Exercise 6.1). Ist die Idealgarbe, die zu H gehört, durch ein Element $L \in k[X_0, \ldots, X_r]$ gegeben, so lässt sich die Multiplikationsabbildung α beschreiben als

$$\alpha \colon \widetilde{\langle L \rangle \otimes_{k[X_0, \ldots, X_r]} k[X_0, \ldots, X_r]/I} \to \widetilde{k[X_0, \ldots, X_r]/I},\ A \cdot L \otimes \overline{F} \mapsto \overline{A \cdot L \cdot F}.$$

Angenommen, es gäbe A, L, F mit $\overline{ALF} = 0$ und $AF \notin I$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $AF \notin q_i$, aber $ALF \in I \subseteq q_i$. Also ist $L^n \in q_i$ und damit $L \in \sqrt{q_i}$, was ein Widerspruch zur Wahl von H ist. Aus der Injektivität von α und der Exaktheit der Sequenz können wir dann $\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathcal{O}_H, \mathcal{O}_X) = 0$ folgern. Weiterhin erhalten wir aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

durch Tensorieren mit $\mathcal{O}_H$ über $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ die exakte Sequenz

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(\mathcal{O}_H, \mathcal{O}_X) = 0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_H \to \mathcal{O}_H \otimes \mathcal{O}_X \to 0.$$

Also kann $\mathcal{J}$ in $\mathcal{O}_H$ eingebettet werden und ist eine Idealgarbe auf H.

Tensorieren der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

mit $\mathcal{I}(n+1)$ ergibt die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{I}(n) \to \mathcal{I}(n+1) \to \mathcal{J}(n+1) \to 0.$$

Daher ist das Hilbertpolynom von $\mathcal{J}$

$$h_{\mathcal{J}}(t) = h_{\mathcal{I}}(t) - h_{\mathcal{I}}(t-1) = q(t) - q(t-1)$$

unabhängig von $\mathcal{I}$ und der Wahl von H. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, das von $h_{\mathcal{J}}(t)$ abhängt, so dass für $\mathcal{J}$ die Aussagen (i) und (ii) für alle $n \geq n_1$ gelten. Insbesondere erhält man für alle $i \geq 2$ und $n \geq n_1$ einen Ausschnitt aus der induzierten langen Sequenz von Homologien

$$H^{i-1}(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}(n+1)) = 0 \to H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \to H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \to 0 = H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}(n+1))$$

(verwende dabei $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}(n)) = H^i(H, \mathcal{J}(n))$). Also ist

$$\dim H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n))) = \dim(H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)))$$

für alle $i \geq 2$, $n \geq n_1$ und weil $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n))$ nach dem Verschwindungssatz von Serre für großes n (im Allgemeinen abhängig von $\mathcal{I}$) verschwindet, gilt schon $H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) = 0$ für alle $n \geq n_1$ und $i \geq 2$.

Für den Fall $i = 1$ betrachten wir einen anderen Ausschnitt der induzierten langen exakten Sequenz:

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \overset{\alpha_{n+1}}{\to} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}(n+1)) \to H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \to H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \to 0 \\ = H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}(n+1)) = H^1(H, \mathcal{J}(n+1)) \end{aligned}$$

für jedes $n \geq n_1$. Aus der Exaktheit lässt sich folgern, dass entweder

$$\dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n))) > \dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)))$$

gilt oder α_{n+1} surjektiv ist (und

$$\dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n))) = \dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)))$$

gilt). Zusätzlich folgt aus der Surjektivität von α_{n+1} die Surjektivität von α_{n+2}, wie man an folgendem kommutativen (nachrechnen!) Diagramm sieht:

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[r, "\alpha_{n+1} \otimes \pi"] \arrow[d] & H^0(H, \mathcal{J}(n+1)) \otimes H^0(H, \mathcal{O}_H(1)) \arrow[d, "\beta"] \\ H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+2)) \arrow[r, "\alpha_{n+2}"'] & H^0(H, \mathcal{J}(n+2)) \end{tikzcd}$$

Dabei ist β nach Induktionsvoraussetzung für $n \geq n_1$ surjektiv und $\alpha_{n+1} \otimes \pi$ ist surjektiv, weil α_{n+1} und die Projektion $\pi\colon H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \to H^0(H, \mathcal{O}_H(1))$ surjektiv sind. Also wird schon das Bild von $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1))$ in $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+2))$ auf ganz $H^0(H, \mathcal{J}(n+2))$ abgebildet und α_{n+2} ist surjektiv.

Die Dimension von $H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n))$ wird also bei wachsendem n zunächst bei jedem Schritt ab n_1 echt kleiner, bis ein α_n surjektiv ist und die Dimension stationär wird. Da für große n (wieder abhängig von $\mathcal{I}$) dann $H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) = 0$ nach dem Verschwindungssatz von Serre gilt, wird die Dimension bei 0 stationär. Insbesondere gilt $H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) = 0$ für $n \geq n_1 + \dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n_1)))$.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass es ein n_0 wie gewünscht gibt, das nicht von $\mathcal{I}$ abhängt. Dazu verwenden wir $q(n_1) = \dim(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n_1))) - \dim(H^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n_1)))$ und $\dim(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n_1))) \leq \dim(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n_1)))$ (da $\mathcal{I}$ Idealgarbe von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}$ ist). Dann können wir n_0 für Teil (i) wählen als

$$n_0 := n_1 + \dim(H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n_1))) - q(n_1) + 1.$$

Um zu zeigen, dass n_0 auch für Teil (ii) geeignet gewählt ist, betrachten wir wieder das kommutative Diagramm von oben und erweitern es um eine Abbildung:

$$\begin{tikzcd}
 & H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \arrow[r, "\alpha_n \otimes \pi"] \arrow[d, "\gamma"] & H^0(H, \mathcal{J}(n)) \otimes H^0(H, \mathcal{O}_H(1)) \arrow[d, "\beta"] \\
H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \arrow[r, "\delta"'] & H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1)) \arrow[r, "\alpha_{n+1}"'] & H^0(H, \mathcal{J}(n+1))
\end{tikzcd}$$

Für $n \geq n_0 > n_1$ sind α_n (wie oben gezeigt) und β (nach Induktionsvorraussetzung) surjektiv und damit sind wie oben auch $\alpha_n \otimes \pi$ und α_{n+1} surjektiv. Außerdem ist die untere Zeile als Ausschnitt der langen exakten Sequenz exakt und es gilt zudem, dass das Bild von δ im Bild von γ enthalten ist. Dann gibt es für jedes $v \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n+1))$ ein $w \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ mit $\alpha_{n+1}(v) = \beta((\alpha_n \otimes \pi)(w)) = \alpha_{n+1}(\gamma(w))$, also $v - \gamma(w) \in \mathrm{Kern}(\alpha_{n+1}) = \mathrm{Bild}(\delta) \subseteq \mathrm{Bild}(\gamma)$. Also gibt es ein $w' \in H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}(n)) \otimes H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1))$ mit $\gamma(w') = v - \gamma(w)$, also $\gamma(w' + w) = v$. Damit ist γ surjektiv. $\square$

Korollar. *Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, für das gilt: Sei $\mathbb{P}^r \times S \supseteq X \to S$ eine flache Familie von Unterschemata von $\mathbb{P}^r$ mit Hilbertpolynom $p(t)$, $\sigma\colon \mathbb{P}^r \times S \to S$ die Projektion und $\mathcal{I}_X$ die Idealgarbe von X in $\mathbb{P}^r \times S$. Dann gilt für jedes $n \geq n_0$:*

(i) $\sigma_*\mathcal{I}_X(n)$ ist lokal frei vom Rang $q(n) = \binom{n+r}{r} - p(n)$.

(ii) $R^i\sigma_*\mathcal{I}_X(n) = 0$ für alle $i > 0$.

(iii) Die Multiplikationsabbildung $\sigma_*\mathcal{I}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \sigma_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1) \to \sigma_*\mathcal{I}_X(n+1)$ ist surjektiv.

(iv) Für jeden Schemamorphismus $f\colon T \to S$ ist der natürliche Homomorphismus $f^*\sigma_*\mathcal{I}_X(n) \to \tau_*\mathcal{I}_Y(n)$ ein Isomorphismus, wobei $Y := X \times_S T \subseteq \mathbb{P}^r \times T$ und $\tau\colon \mathbb{P}^r \times T \to T$ die Projektion ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{I}_X$ flach über S ist: Wir erhalten für großes $m \in \mathbb{N}$ die exakte Sequenz

$$R^1\sigma_*\mathcal{I}_X(m) = 0 \to \sigma_*\mathcal{I}_X(m) \to \sigma_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}(m) \to \sigma_*\mathcal{O}_X(m) \to 0$$

(für große m verschwindet $R^1\sigma_*\mathcal{I}_X(m)$ nach dem Verschwindungssatz von Serre bzw. Theorem (8.8) in [Har], wobei verwendet wird, dass Idealgarben quasi-kohärent und im noetherschen Fall sogar kohärent sind). $\sigma_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}(m)$ ist eine lokal freie $\mathcal{O}_S$-Modulgarbe (nimm dafür ohne Einschränkung $S = \operatorname{Spec} A$ an und verwende $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S} = A[X_0, \dots, X_r]$ wie im Beweis des ersten Lemmas) und für großes m folgt wegen der ersten Proposition aus der Flachheit von X, dass $\sigma_*\mathcal{O}_X(m)$ lokal frei ist. Damit ist für großes m auch $\sigma_*\mathcal{I}_X(m)$ lokal frei und wieder nach derselben Proposition ist $\mathcal{I}_X$ eine flache Garbe über S.

Sei jetzt $q(n) = \binom{n+r}{r} - p(n)$ und n_0 wie im vorigen Lemma für $q(n)$ und r. Dann können wir für jedes $s \in S$ die Faser

$$X_s := X \times_S \operatorname{Spec} k(s) \subseteq \sigma^{-1}(s) = \mathbb{P}^r \times S \times_S \operatorname{Spec} k(s) = \mathbb{P}^r$$

betrachten. Aus den beiden kurzen exakten Sequenzen (beachte, dass $\mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)}$ als Strukturgarbe flach ist)

$$0 \to \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} \to \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{I}_{X_s} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_{X_s} \to 0$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} &= \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r},\\ \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} &= \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times S} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k(s)}\\ &= \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k(s)} = \mathcal{O}_{X\times_S \operatorname{Spec} k(s)} = \mathcal{O}_{X_s}\end{aligned}$$

folgt, dass die Garbe $(\mathcal{I}_X)_s = \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}_{\sigma^{-1}(s)} = \mathcal{I}_{X_s}$ eine Idealgarbe auf $\mathbb{P}^r$ ist mit dem Hilbertpolynom

$$h_{\mathcal{I}_{X_s}}(n) = h_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}}(n) - h_{\mathcal{O}_{X_s}}(n) = \binom{n+r}{r} - p(n) = q(n).$$

Dann gilt $H^i(\mathbb{P}^r, (\mathcal{I}_X(n))_s) = H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n)) = 0$ für $n \geq n_0$ und $i \geq 1$ und damit ist Teil (iii) der zweiten Proposition für $\mathcal{I}_X(n)$ erfüllt. Daraus können wir für dasselbe n_0 Teil (i), (ii) und (iv) der Aussage folgern: Teil (ii) entspricht Teil (i) der genannten Proposition, Teil (iv) folgt mit $(\mathrm{id} \otimes f)^*\mathcal{I}_X(n) = \mathcal{I}_Y(n)$ für $n \geq n_0$ und für Teil (i) benutzen wir

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(\sigma_*\mathcal{I}_X(n)) &= \dim(\sigma_*\mathcal{I}_X(n) \otimes k(s)) = \dim H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n))\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim H^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n)) = h_{\mathcal{I}_{X_s}}(n).\end{aligned}$$

Für Teil (iii) zeigen wir, dass für jedes $s \in S$ und $\iota_s\colon \operatorname{Spec} k(s) \to S$ die Abbildung

$$\iota_s^*(\sigma_* \mathcal{I}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1)) \to \iota_s^*(\sigma_* \mathcal{I}_X(n+1))$$

surjektiv ist: Dafür verwenden wir

$$\begin{aligned} &\iota_s^*(\sigma_* \mathcal{I}_X(n) \otimes_{\mathcal{O}_S} \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1)) = \iota_s^* \sigma_* \mathcal{I}_X(n) \otimes_{\iota^* \mathcal{O}_S} \iota_s^* \sigma_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1) \\ &= H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n)) \otimes_k H^0(\mathbb{P}^r, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(1))_s) = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n)) \otimes_k H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)) \end{aligned}$$

und analog $\iota_s^*(\sigma_* \mathcal{I}_X(n+1)) = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{I}_{X_s}(n+1))$. Dann folgt die Surjektivität direkt aus Teil (ii) des vorigen Lemmas und der Aussage des folgenden Lemmas. □

Lemma. *Sei S ein Schema, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei kohärente, fast freie Garben auf S und $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Gilt für jedes $s \in S$ und die zugehörige natürliche Abbildung $\iota_s\colon \operatorname{Spec} k(s) \to S$, dass die Abbildung $\varphi_s\colon \iota_s^* \mathcal{F} \to \iota_s^* \mathcal{G}$ surjektiv ist, dann ist φ surjektiv.*

Beweis. Ohne Einschränkung gilt $S = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{F} = \widetilde{A^k}$ und $\mathcal{G} = \widetilde{A}^l$. φ wird induziert von $f'\colon A^k \to A^l$. Zu zeigen ist, dass für jedes $p \in \operatorname{Spec} A$ gilt: $f\colon (A_p)^k \to (A_p)^l$ ist surjektiv.

Sei jetzt $p \in \operatorname{Spec} A$ fest und $m \in \operatorname{Spec} A$ das maximale Ideal mit $p \subseteq m$. Aus der Surjektivität $\varphi_s\colon \iota_s^* \mathcal{F} \to \iota_s^* \mathcal{G}$ folgt die Surjektivität von $f_p\colon \operatorname{Quot}(A/p)^k \to \operatorname{Quot}(A/p)^l$ für jedes $s \in S$ bzw. $p \in \operatorname{Spec} A$ und insbesondere die Surjektivität von $f_m\colon (A/m)^k \to (A/m)^l$.

Schreibe f' als lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix $M \in A^{k \times l}$ und sei M_m das Bild von M in $(A/m)^{k \times l}$. Der Rang von M_m ist n wegen der Surjektivität von f_m und ohne Einschränkung ist $M_m = (M_m^* | *)$ mit $M_m^* \in (A/m)^{k \times k}$ invertierbar. Für $M = (M^* | *)$ gilt dann $\det(M^*) + m = \det(M_m^*) \neq 0$, also $\det(M^*) \notin m \supseteq p$.

Es gilt $(M^*)^\sharp \cdot M^* = \det M^* \cdot I_k = M^* \cdot (M^*)^\sharp$, also hat M^* als Matrix über A_p eine Inverse $(M^*)^{-1}$. Für $a \in (A_p)^l$ gilt also

$$f\left(\begin{pmatrix} & (M^*)^{-1} & \\ 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} a\right) = a$$

und damit ist f surjektiv. □

Literatur

[Eis] Eisenbud, David: *Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry.* Springer, New York 2004.

[Har] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry.* Springer, New York 2004.

[Mat] Matsumura, Hideyuki: *Commutative algebra.* Benjamin/Cummings, Reading 1981.

[Ser] Serre, Jean-Pierre: *Faisceaux Algebriques Coherents.* In: *The Annals of Mathematics* **61**, 2 (1955), Seiten 197-278.