11 Cayley Expander Graphen

11.1 Zum Warmwerden

Definition Sei H eine Gruppe und $S \subset H$. Dann nennt man den Graphen $C(H,S) := G(H,E)$ mit $E = \{(h, h \cdot s) | h \in H, s \in S\}$ einen Cayley Graph. Bei uns gilt: $S = S^{-1}$ (also ist $C(H,S)$ ungerichtet) und S erzeugt H (also $C(H,S)$ ist zusammenhängend).

Notation $\lambda(H,S)$ sei der normalisierte zweite Eigenwert von $C(H,S)$.

Was wir suchen Eine Familie von Gruppen $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit passenden Erzeugern $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sodass $(C(H_i,S_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Expandern ist. Also soll $|S_i| = d$ und $\lambda(H,S) \leq 1 - g < 1$ sein für von i unabhängige d und g.

Proposition Für eine Familie von abelschen Gruppen $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren keine $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sodass $(C(H_i,S_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Expanderfamilie wird.

Bemerkung: Wenn man obige Proposition anders aufzieht erhält man, dass in abelschen Gruppen logarithmisch viele Erzeuger nötig sind um eine feste Expansion (z.B. $\lambda = \frac{1}{2}$) zu erreichen. Man kann außerdem zeigen: Logarithmisch viele Erzeuger reichen dafür immer.

11.2 Darstellungen

Eine Darstellung (V,φ) einer Gruppe H ist eine Struktur V zusammen mit einem Homomorphismus von H in die Automorphismengruppe $Aut(V)$.

Einschränkung: Wir betrachten nur endliche Gruppen und $V \tilde{=} \mathbb{C}^d$. Bilder von Gruppenelementen sollen zudem stets unitäre Matrizen sein. Genauer:

Definition Eine unitäre Darstellung (φ, V) einer endlichen Gruppe H ist ein Homomorphismus $\varphi : H \to U(V)$. Dabei ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U(V)$ die Menge der linearen Abbildungen A auf V, die das Skalarprodukt im Sinne $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ respektieren. Jedem Element wird also eine unitäre Matrix zugeordnet.

11.2.1 Spezialfall: $V = \mathbb{C} \Rightarrow \varphi$ ist Charakter

Sei $(\mathbb{C}, \varphi)$ Darstellung einer Gruppe H in unserem Sinne. $\varphi(h)$ "unitäre Matrix" $\Leftrightarrow \varphi(h) \in \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$. Also ist φ ein Homomorphismus von H in den Einheitskreis. Das kennen wir schon, das ist gerade ein Charakter von H.

Erinnerung Ist χ ein Charakter einer abelschen Gruppe H und G $= C(H,S)$ ein Cayleygraph, dann ist der Vektor $(\chi(h))_{h\in H}$ ein Eigenvektor der Adjazenzmatrix von G zum Eigenwert $\sum\limits_{s\in S} \chi(s)$.

11.2.2 Reguläre Darstellung

Definition Die sogenannte reguläre Darstellung $(\mathbb{C}^H, r)$ einer endlichen Gruppe H schickt jedes Element $s \in H$ auf diejenige unitäre Abbildung, die δ_h auf δ_{hs} abbildet (hier ist $\delta_h(g)$ genau für $h = g$ eins und sonst null).
Jedes $r(s)$ ist also sowas wie eine Permutationsmatrix.

Feststellung Sei (V, φ) eine Darstellung von H. Wenn es einen nichttrivialen Unterraum $V' \subset V$ gibt mit $\varphi(h)(V') = V'$ für alle $h \in H$, dann gilt auch $\varphi(h)(V'^{\perp}) = V'^{\perp}$. Dann sind (V', φ) und $(V'^{\perp}, \varphi)$ Darstellungen von H, deren Summe gerade (V, φ) ist. Auf diese Weise kann man jede Darstellung eindeutig (bis auf Isomorphie) in "irreduzible" Darstellungen zerlegen.

Weisheit aus Algebra Jede irreduzible Darstellung tritt als Summand in der regulären Darstellung auf. Insbesondere gibt es nur endlich viele (nicht isomorphe) Darstellungen.

Feststellung Mithilfe der regulären Darstellung r einer Gruppe H lässt sich die Adjazenzmatrix A jedes Cayleygraphen $C(H, S)$ über H so ausdrücken:

$$A = \sum_{s \in S} r(s)$$

Die Eigenwerte davon kann man analysieren, wenn man nutzt, dass r in kleinere Darstellungen zerfällt und die Eigenwerte der entsprechenden kleinen Blockmatrizen ausrechnet.

11.3 Schreier Graphen

Schreiergraphen sind eine Verallgemeinerung von Cayley Graphen.

Definition Eine Gruppenaktion einer Gruppe H auf eine Menge X ist eine Abbildung $* : H \times X \to X$ wobei für $h_1, h_2 \in H$ und $x \in X$ gilt $h_1 * (h_2 * x) = (h_1 \cdot h_2) * x$ und $1 * x = x$. Insbesondere ist die Linksmultiplikation $\pi_h : X \to X, \pi_h(x) = h * x$ eine Permutation für jedes $h \in H$.

Definition Ein Schreiergraph $\mathrm{Sch}(H, X, S)$ ist ein Graph (X, E) mit $E = \{(x, s * x) | x \in X, s \in S\}$, wobei H eine Gruppe und $S \subset H$.

Satz Jeder $2d$-reguläre Graph ist ein Schreiergraph.

Satz Die Eigenwerte eines Schreiergraphen $\mathrm{Sch}(H, X, S)$ sind auch Eigenwerte des Cayleygraphen $C(H, S)$.

Korrolar Wenn $C(H, S)$ ein Expander (mit zweitem Eigenwert λ_2), dann ist jeder Schreiergraph $\mathrm{Sch}(H, \cdot, S)$ auch ein Expander (mit zweitem Eigenwert $\leq \lambda_2$), sofern er zusammenhängend ist.

11.4 Ersetzungsprodukt (von Graphen) und Semidirekted Produkt (von Gruppen)

In diesem Abschnitt werden wir feststellen, dass man manchmal aus zwei Cayleygraphen einen größeren Cayleygraphen bauen kann, wobei der große Graph mit dem Ersetzungsprodukt aus den alten Graphen hervorgeht und die neue Gruppe mit dem semidirekten Produkt aus den alten Gruppen.

Definition Die Aktion einer Gruppe B auf einer *Gruppe* A ist ein Aktion der Gruppe B auf der Menge A, die die Gruppenstruktur von A respektiert. Es muss gelten: $b * (a_1 \cdot a_2) = (b * a_1) \cdot (b * a_2)$.

Definition Wenn eine Gruppe B auf einer Gruppe A aggiert, dann wird $A \times B$ mit folgender Verknüpfung zu einer Gruppe:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot (b_1 * a_2), b_1 \cdot b_2)$$

Diese Konstruktion heißt semidirektes Produkt und die entstandene Gruppe bezeichnen wir mit $A \rtimes B$.

Konstruktion Ziel: Gegeben $C(A, S_A)$ und $C(B, S_B)$, finde S sodass $C(A \rtimes B, S)$ als Ersetzungsprodukt aus den beiden Graphen hervorgeht. Details, siehe Vortrag.