Expandergraphen

Katharina Hörenberg

29.04.2011

Unsere Graphen:
Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E. Multikanten und Schleifen sind erlaubt, nützen uns aber wenig. Außerdem soll unser Graph G zusammenhängend sein und wir definieren uns auf G eine **Distanzfunktion**:

$$d : \begin{cases} \mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V) \to \mathbb{N}_0 \\ (A, B) \mapsto \min\{|\{e \in E \mid \text{Kanten bilden Weg von A nach B}\}|\} \end{cases}$$

Definition (Rand einer Menge)**:**
Sei $G = (V, E)$ Graph und $S \subseteq V$, $\bar{S} = V \backslash S$.
a) Der Kantenrand ist definiert als $\partial(S) := E(S, \bar{S})$.
b) Der Knotenrand ist definiert als $\Gamma(S) := \{y \in V \mid d(y, S) = 1\}$.

Definition 1 ($h(G)$-Expander)**:**
Einem Graphen G können wir den Wert $h(G)$, die Cheerger-Konstante, zuordnen, der das Expansionsverhältnis der Kanten beschreibt mit

$$h(G) := \min_{\{S \subseteq V, |S| \leq \frac{n}{2}\}} \frac{|\partial S|}{|S|}.$$

Definition 2 ((n, k, c)-Expander)**:**
Sei $G = (V, E)$ k-regulärer Graph. G heißt (n, k, c)-Expander , wenn gilt:

$$|\Gamma(S)| \geq c(1 - \frac{|S|}{n})|S| \qquad \text{für alle } S \subseteq V \text{ und } |V| = n$$

Definition 3 ((n, k, c')-Expander)**:**
Sei $G' = (V, E)$ bipartiter, k-regulärer Graph mit Partition (L,R) und $|L| = |R| = n$. G' heißt (n, k, c')-Expander, wenn gilt:

$$|\Gamma(S)| \geq (1 + c')|S| \qquad \text{mit } S \subseteq L \text{ und } |S| \leq \frac{n}{2}$$

Definition (Matching/Paarung)**:**
Eine Menge unabhängiger Kanten in einem Graphen heißt Matching oder Paarung.

Satz (Halls Lemma (Heiratssatz))**:**
Sei G bipartiter Graph mit Partition (L, R) und $|L| = |R|$. Dann gilt:
G enthält ein perfektes Matching. $\Leftrightarrow$ G erfüllt die Heiratsbedingung $|\Gamma(S)| \geq |S|$ $\forall S \subseteq L$.

Bemerkung:
Es gilt:

a) Jeder endliche, zusammenhängende, k-reguläre Graph ist Expander für ein $c > 0$.

b)
1. Ist G ein (n, k, c)-Expander im Sinne von Definition 2, dann lässt sich G in einen $(n, k+1, \frac{c}{2})$-Expander im Sinne von Definition 3 umwandeln.
2. Ist G ein $(n, k+1, c')$-Expander im Sinne von Definition 3, dann lässt sich G in einen $(n, 2k, \frac{c'}{2k})$-Expander im Sinne von Definition 2 umwandeln.

Proposition:
Sei G ein k-regulärer Graph mit n Knoten. Dann gilt:
a) Ist G ein (n, k, c)-Expander, dann folgt $h(G) \geq \frac{c}{2}$.
b) G ist ein $(n, k, \frac{h(G)}{k})$-Expander.

Satz (Existenz von Expandergraphen)**:**
Sei $\mathbb{N} \ni k \geq 5$ und $c = \frac{1}{2}$. Dann gilt:
Es gibt k-reguläre Graphen G_n mit n Knoten, die $|\Gamma(S)| \geq c|S|$ mit $|S| \leq \frac{n}{2}$ und $S \subset V$ erfüllen. Für große n erfüllen "die meisten" Graphen diese Bedingung und sind insbesondere Expandergraphen.

Definition (Expanderfamilie)**:**
Eine Folge von k-regulären Graphen $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit wachsender Knotenanzahl heißt Familie von Expandern, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass $h(G) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Definition (Magische Graphen)**:**
Sei $G = (V, E)$ bipartiter (Partition (L,R)), k-regulärer Graph. G ist ein $(n, m; k)$-magischer Graph, wenn gilt:
$|L| = n, |R| = m$ und
(1) $|\Gamma(S)| \geq \frac{5k}{8}|S|$ für alle $S \subseteq L$ und $|S| \leq \frac{n}{10*k}$
(2) $|\Gamma(S)| \geq |S|$ für alle $S \subseteq L$ und $\frac{n}{10 \cdot k} < |S| \leq \frac{n}{2}$.

Lemma:
Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq 32$, $n \geq n_0$ und $m \geq \frac{3n}{4}$ ein $(n, m; k)$-magischer Graph existiert.

Definition (Superkonzentrator)**:**
Sei $G = (V, E)$ Graph mit ausgezeichneten Mengen $I, O \subseteq V$ (Input-, Outputset) mit $|I| = |O| = n$. Dann ist G ein Superkonzentrator, wenn gilt:
Für alle $k \in \mathbb{N}, S \subseteq I$ und $T \subseteq O$ mit $|S| = |T| = k$, gibt es k knotendisjunkte Wege in G von S nach T.