Extremwerte der Expanderkonstanten

Seminar Expandergraphen
Sommersemester 2011

Myriam Finster

20. Mai 2011

1 Isoperimetrische Ungleichung

1.1 klassisch:

Frage: Welche geschlossene Kurve der Länge l umschließt den größten Flächeninhalt?
Antwort: Der Kreis! Erster Beweis von Jacob Steiner 1841 (allerdings mit einer kleinen Lücke) .

Definition 1. Sei K eine kompakte, konvexe Fläche. Definiere $[x_1, x_2]$ als Projektion von K auf die x-Achse und für $x \in [x_1, x_2]$, $y_1(x) := \min\{y \mid (x,y) \in K\}$ und $y_2(x) := \max\{y \mid (x,y) \in K\}$. Die Steiner-Symmetrisierung von K ist dann

$$K' := \{(x,y) \mid x \in [x_1, x_2], |y| \leq (y_2(x) - y_1(x))/2\}\,.$$

1.2 in Graphen:

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter, d-regulärer Graph, $S \subseteq V$. Dann entspricht die Anzahl $|S|$ der Knoten dem Flächeninhalt und die Mächtigkeit des Knotenrands $\Gamma(S) = \{y \in V \mid d(y, S) = 1\}$ bzw. des Kantenrands $\partial(S) = E(S, \overline{S})$ dem Umfang.

Definition 2. Sei $1 \leq k \leq |V|$.

$$\Phi_E(G,k) := \min_{S \subseteq V}\{\, |E(S,\overline{S})| : |S| = k\,\}$$

$$\Phi_V(G,k) := \min_{S \subseteq V}\{\, |\Gamma(S)| : |S| = k\,\}$$

Bemerkung. Die Berechnung der Expanderkonstanten $\Phi_E(G,k)$ und $\Phi_V(G,k)$ ist im Allgemeinen co-$\mathcal{NP}$-schwer. In Einzelfällen, wie z.B. beim d-dimensionalen Hyperwürfel sind beide Parameter vollständig bekannt.

2 Extremwerte zu Spektrum und Expansion

Wie groß können $\Phi_E(G,k)$, $\Phi_V(G,k)$ und $d - \lambda_2$ in einem (n,d)-Graphen werden?
Der beste unendliche Expandergraph ist der unendliche d-reguläre Baum T_d.

2.1 Die Expansion von T_d

Es gilt:

$$h(T_d) = \inf_{S \subseteq V \text{ endlich}} \frac{|E(S,\overline{S})|}{|S|} = \lim_{k \to \infty} \frac{k(d-2)+2}{k} = d - 2$$

Für jeden (endlichen) (n,d)-Graphen gilt demnach $\Phi_E(G,k) \leq k(d-2)+2)$.

2.2 Das Spektrum von T_d

Definition und Bemerkung 3.

1. Sei K ein Körper, X, Y normierte K-Vektorräume, $T : X \to Y$ linear und stetig, dann heißt T *linearer Operator*.
2. Der Folgenraum $l^2(V(T_d)) = \{f : V(T_d) \to \mathbb{R} \mid \sqrt{\sum_{v \in V(T_d)} |f(v)|^2} < \infty\}$ ist ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.
3. Die unendlichdimensionale „Adjazenzmatrix“ A_T von T_d definiert einen linearen Operator auf $l^2 := l^2(V(T_d))$. Es gilt
$$(A_T \cdot f)(v) = \sum_{w \text{ mit } d(w,v)=1} f(w)$$
4. Das *Spektrum* von A_T ist $\operatorname{spec}(A_T) = \{\lambda \mid (A_T - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$.
Vorsicht: Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall ergeben hier „nicht injektiv“ und „nicht surjektiv“ unterschiedliche Eigenwerte.
5. A_T hat keine Eigenvektoren, das Punktspektrum ist also leer.

Theorem 1 (Cartier 1971)**.**
$$\operatorname{spec}(A_T) = [-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$$

Definition 4. Eine Funktion $f \in l^2$ heißt *sphärisch* um $v \in V(T_d)$, falls $f(u)$ nur von $d(u,v)$ abhängt. Sei $g \in l^2$. Eine Abbildung $f \in l^2$ heißt *sphärische Symmetrisierung* von g um v, falls f sphärisch um v ist und falls für alle i
$$\sum_{u \text{ mit } d(u,v)=i} f(u) = \sum_{u \text{ mit } d(u,v)=i} g(u)$$
gilt.

2.3 Das Spektrum von (n,d)-Graphen $G = (V,E)$

Erinnerung: $\frac{d-\lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2d(d-\lambda_2)}$

Theorem 2 (Alon-Boppana)**.** *Es gibt ein $c > 0$, so dass für alle (n,d)-Graphen mit Durchmesser Δ gilt:*
$$\lambda_2(G) \geq 2\sqrt{d-1}\left(1 - \frac{c}{\Delta^2}\right)$$

Sei $T_{d,k}$ der d-reguläre Baum der Höhe k mit Wurzel v und A_k seine Adjazenzmatrix.
Achtung: $T_{d,k}$ ist nicht wirklich regulär (wegen der Blattknoten).

Lemma 1. *Der größte Eigenwert μ von A_k ist ein einfacher Eigenwert. Der zugehörige Eigenvektor g kann strikt positiv gewählt werden und ist, aufgefasst als Abbildung von $V(T_{d,k})$ nach $\mathbb{R}_{>0}$, sphärisch um die Wurzel v.*

Theorem 3 (Serre)**.** *Für alle $d \in \mathbb{Z}$ und alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $c = c(\epsilon, d)$, so dass jeder (n,d)-Graph G mindestens cn Eigenwerte größer als $2\sqrt{d-1} - \epsilon$ hat.*

Bemerkung. Das beste bekannte c ist in etwa $(d-1)^{-\pi\sqrt{2/\epsilon}}$.