Konstruktion einer Expandergraphenfamilie

Andreas Geyer-Schulz

4. Vortrag am 27. Mai 2011

Der erste Teil dieses Vortrags orientiert sich eng an [D05, Kapitel 5], der zweite Teil an [HLW06, Kapitel 8]. Das Hauptergebnis ist Satz 8.

Definition und Satz 1 (Charaktergruppe) Sei H eine endliche abelsche Gruppe. Ein Homomorphismus $\chi : H \to \mathbb{C}^\times$ heißt **Charakter** von H. Die Menge $\widehat{H} := \{\chi : \ \chi \text{ Charakter von } H\}$ ausgestattet mit der punktweisen Multiplikation $(\chi\eta)(a) := \chi(a)\eta(a)$ für alle $\chi, \eta \in \widehat{H}$, $a \in H$ ist eine abelsche Gruppe und heißt **Charaktergruppe** von H.

a) Ist $H = \{1, \tau, \ldots, \tau^{n-1}\}$ zyklisch von Ordnung $n \in \mathbb{N}$, so ist $\widehat{H}$ auch zyklisch von Ordnung n und die Charaktere sind gegeben durch

$$\chi_x(\tau^k) = \omega^{xk}, \quad k \in \{0, \ldots, n-1\},$$

für $x \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dabei ist $\omega := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ die n-te Einheitswurzel.

b) Sind H_1 und H_2 endliche abelsche Gruppen, so ist $\widehat{H_1} \times \widehat{H_2}$ isomorph zu $\widehat{H_1 \times H_2}$.

c) Die Abbildung $a \mapsto \delta_a$ ist ein Isomorphismus zwischen H und $\widehat{\widehat{H}}$, dabei ist $\delta_a : \widehat{H} \to \mathbb{C}^\times$ gegeben durch $\chi \mapsto \chi(a)$ für jedes $a \in H$ die **Punktauswertung**.

Beispiel 2 a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ besitzt die Charaktere $\chi_x : a \mapsto \omega^{xa}$ für $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ besitzt die Charaktere $\chi_x : a \mapsto (-1)^{\langle x,a\rangle}$ für $x \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$. Dabei ist $\langle x, a\rangle := x_1a_1 + \ldots + x_da_d$.

c) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ besitzt die Charaktere $\chi_x : a \mapsto \omega^{\langle x,a\rangle}$ für $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Dabei ist $\langle x, a\rangle := x_1a_1 + x_2a_2$.

Definition und Satz 3 (Eigenwerte von Cayley-Graphen) Sei H eine endliche abelsche Gruppe und $S \subseteq H$ symmetrisch, d.h. aus $s \in S$ folgt $s^{-1} \in S$. Der **Cayley-Graph** $C(H, S)$ hat die Eckenmenge H und $a \in H$ hat genau die Nachbarn as für alle $s \in S$. $C(H, S)$ ist also ein ungerichteter $|S|$-regulärer Graph.

Sei nun A die Adjazenzmatrix von $C(H, S)$ und $\chi \in \widehat{H}$. Dann ist der Vektor $(\chi(a))_{a\in H}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\sum_{s\in S} \chi(s)$.

Beispiel 4 a) Sei $H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $S = \{+1, -1\}$. Dann ist $C(H, S)$ der n-Zykel, der nach Satz 3 zum Charakter χ_x gehörende Eigenwert ist $2\cos(2\pi x/n)$.

b) Sei $H = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$ und $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$, wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ ist. Hier ist $C(H, S)$ der d-dimensionale Hyperwürfel, die Eigenwerte sind $d - 2k$ für $k \in \{0, \ldots, d\}$.

Definition und Satz 5 (Fouriertransformation) Sei H eine endliche abelsche Gruppe und $l^2(H) := \mathbb{C}^H$ ausgestattet mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{|H|}\sum_{a\in H} f(a)\overline{g(a)}, \quad f, g \in l^2(H).$$

Für $f \in l^2(H)$ ist die **Fouriertransformierte** $\widehat{f} \in l^2(\widehat{H})$ definiert durch:

$$\widehat{f}(\chi) := \langle f, \chi\rangle, \quad \chi \in \widehat{H}.$$

Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ ist ein Isomorphismus zwischen den Hilberträumen $l^2(H)$ und $l^2(\widehat{H})$. Für alle $f, g \in H$ gilt: $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \frac{1}{|H|}\langle f, g\rangle$.

Satz 6 (Eigenschaft der Fouriertransformation auf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $H := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. A sei eine invertierbare 2×2 Matrix über $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $b \in H$, $f \in l^2(H)$ und $g(a) := f(Aa + b)$ für alle $a \in H$. Dann gilt:

$$\widehat{g}(\chi_x) = \omega^{\langle A^{-1}b, x\rangle}\widehat{f}(\chi_{(A^{-1})^\top x}), \quad x \in H,$$

wobei χ_x wie in Beispiel 2c) definiert ist.

Definition 7 (Konstruktion von Margulis) Seien $T_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $T_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $e_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\end{smallmatrix}\right)$, $e_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ und $V_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. $G_n := (V_n, E_n)$ sei derjenige ungerichtete 8-reguläre Graph, bei dem die Ecke $v \in V_n$ genau die Nachbarn $T_1v, T_2v, T_1v + e_1, T_2v + e_2$ sowie $T_1^{-1}v, T_2^{-1}v, T_1^{-1}v - e_1, T_2^{-1}v - e_2$ hat.

Satz 8 (Satz von Gabber-Galil: G_n ist Expanderfamilie) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für den zweitgrößten Eigenwert λ_2 von G_n:

$$\lambda_2(G_n) \leq 5\sqrt{2} < 7{,}3 < 8.$$

Hilfssatz 9 (Ordnung muss sein) Es sei

$$\lozenge := \{z = (z_1, z_2) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 : \ \exists \text{ Vertreter } \tilde{z}_i \text{ von } z_i \text{ mit } |\tilde{z_1}| + |\tilde{z_2}| \leq n/2\}.$$

Dann gibt es eine partielle Ordnung auf $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ sodass für alle $z \in \lozenge\backslash\{0\}$ genau eine der beiden Möglichkeiten gilt:

(I) Drei der vier Punkte T_1z, T_2z, $T_1^{-1}z$ und $T_2^{-1}z$ sind $> z$ und einer ist $< z$.

(II) Zwei der vier Punkte T_1z, T_2z, $T_1^{-1}z$ und $T_2^{-1}z$ sind $> z$ und die anderen beiden sind nicht mit z vergleichbar.

Literatur

[D05] Anton Deitmar: *A First Course in Harmonic Analysis. – 2nd ed.* Springer-Verlag, New York, 2005.

[HLW06] Shlomo Hoory, Nathan Linial und Avi Wigderson: *Expander Graphs and their Applications.* Bulletin of the AMS 43 (2006), 439561.