Expandergraphen: Kantendisjunkte Wege

Ben Strasser

24. Juni 2011

Problem 1 (Kanten Disjunkte Wege)**.** Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$ und q Knoten Paare $\{a_i, b_i\} \in \binom{V}{2}$, finde q kantendisjunkte Pfade p_i, so dass p_i die Knoten a_i und b_i als Endpunkte hat.

Bemerkung. Dieses Problem ist $\mathcal{NP}$-schwer falls q teil der Eingabe ist.

Problem 2 (Relaxierte Kanten Disjunkte Wege)**.** Gegeben einen Graphen $G = (V, E)$ und zwei Knotenmengen $A, B \subset V$ mit q Elementen, finde q kantendisjunkte Pfade p_i, so dass einer der Endpunkte in A liegt und der andere in B. Ferner muss es zu jedem Knoten in A und B einen Pfad geben.

Bemerkung. Das Problem 2 ist in $\mathcal{P}$.

Satz 3. *Das Problem 1 lässt sich randomisiert auf einem $4s$-regulären Expander $G = (V, E)$ mit passender Expansion und $q \leq n/(\ln n)^\kappa$ für ein passendes κ in $o(n^3)$ lösen wobei $n = |V|$. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist eine Nullfolge mit Parameter n.*

Bemerkung. Im Paper werden κ und die notwendige Expansion nur indirekt im Beweis angegeben. Der Algorithmus besteht aus den folgenden Teilphasen.

1. Spalte G in zwei Expanderteilgraphen G_R und G_B auf.
2. Wähle $2q$ zufällige Knoten die weit genug voneinander entfernt sind.
3. Verbinde die ursprünglichen Endknoten mit diesen $2q$ Knoten irgendwie kantendisjunkt in G_R. (Dies ist eine Instanz von Problem 2.)
4. Wähle ausreichend viele Pfade zwischen diesen neuen Endknoten in G_B. Diese Pfade kommen anderen Endknoten nicht zu nahe und sind in der Mitte auch weit genug voneinander weg.
5. Baue den Konfliktgraph dieser Pfade auf, zerlege ihn in seine Zusammenhangskomponenten und löse das Problem durch erschöpfende Suche in jeder Komponente.

Satz 4. *Gegeben einen $4s$-regulären Expander $G = (V, E)$, so kann man ihn randomisiert in zwei Subgraphen $G_R = (V, E_R)$ und $G_B = (V, E_B)$ zerlegen wobei E_R und E_B eine Kantenparition bilden. Beide Subgraphen sind 1-Expander. Ferner ist der Grad jedes Knoten zwischen s und $3s$. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist eine Nullfolge mit Parameter $|V|$.*

Definition 5. Eine (gleichmäßige) Zufallsbeweung der Länge τ auf G mit Startknoten u ist eine Verteilung auf der Menge der gerichteten Pfade mit τ Kanten mit erstem Knoten u. Ein Pfad $u = p_0, p_1, \ldots, p_\tau$ hat die Wahrscheinlichkeit $1/\prod_{i\in\{1,\ldots,\tau\}} \deg p_{i-1}$. Ferner ist $P^\tau_{u,v} := P(p_\tau = v \mid p_0 = u)$ die Wahrscheinlichkeit in τ Schritten von u zu v zu kommen mit einer Zufallsbewegung.

Satz 6. *Gegeben $G = (V, E)$ mit Maximalgrad Δ und einer Vorberechnung welche $O(|V|^3 \tau)$ benötigt, ist es möglich mit $O(\tau\Delta)$ Zeit einen uv-Pfad mit τ Kanten nach einer Zufallsbewegung zu ziehen (oder zu entscheiden, dass es keinen solchen Pfad gibt).*

Satz 7 (Lovász Local)**.** *Es seien $A_1, \ldots, A_N$ Ereignisse und der dazugehörige Abhängigkeitsgraph (d.h. die Ereignisse bilden die Kanten und es gibt genau dann eine Kante, wenn zwei Ereignisse abhängig sind). Wenn es ein p und ein d gibt, so dass*

$$\begin{aligned} P(A_i) &\leq p && \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ \deg A_i &\leq d && \forall i \in \{1, \ldots, N\} \\ 4pd &\leq 1 \end{aligned}$$

dann gilt

$$P\left(\bigwedge_{i\in\{1,\ldots,N\}} \neg A_i\right) > 0$$

.

Problem 8 (Unabhängige Hitting Menge)**.** Gegeben einen k-partiten Graph $G = (V, E)$ mit einer Parition der Knoten $V_1, V_2, \ldots, V_k$ wähle aus jeder Partition einen Knoten aus, so dass keine Kante zwischen ausgewählten Knoten existiert.

Satz 9. *Für jede Instanz I von Problem (8) mit Maximalgrad $\Delta = h^2/(\ln h)$ und Paritionen der Größe $|V_1| = \ldots = |V_k| = m = h^2/2$ und jedes $h \geq e^{16}$ gibt es eine Lösung.*

Bemerkung. Im Anwendungsfall ist $h = \ln n$ wobei n die Anzahl der Knoten vom Eingabegraph ist. Der Algorithmus benötigt also mindestens $n \geq \exp(\exp(16)) > 10^{3000000}$ Knoten um seine Gütegarantie zu entfalten. Zum Vergleich: Im Universum gibt es grob geschätzt 10^{85} Teilchen.

Satz 10. *Es sei $G = (V, E)$ ein zufälliger Graph, mit einer oberen Schranke p für die Kantenexistenzwahrscheinlichkeit, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Komponente mit mindestens k Knoten gibt kleiner ist als $k^{-2}p^{-1}(|V|\, ep)^k$.*

Satz 11. *Es sei $G = (V, E)$ ein zufälliger Graph mit $|V| \leq h/(\ln h)^7$ und Kantenexistenzwahrscheinlichkeit $p \leq (\ln h)^6/h$ dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Komponente mit $\ln h/(\ln\ln h)$ Knoten oder mehr gibt eine Nullfolge mit Parameter h ist.*