Ramanujan Graphen und das Spektrum zufälliger Graphen

Jonathan Rollin

1. Juni 2011

1 Ramanujan Graphen

Definition 1:
Ein d-regulärer Graph G heißt *Ramanujan*, wenn $max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} \leq 2\sqrt{d-1}$.
Dabei entspricht λ_2 dem zweitgrößten und λ_n dem kleinsten Eigenwert der Adjazenzmatrix von G.

Theorem 1:
Sei p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$ beliebig.
Dann gibt es unendlich viele, d-reguläre Ramanujan Graphen für $d = p^k + 1$.

2 Das Spektrum in Überlagerungen von Graphen

Definition 2:
Seien G und H einfache Graphen (also ohne Schleifen und Mehrfachkanten). Eine Funktion $f : V(H) \to V(G)$ ist eine *Überlagerungsabbildung* („Überlagerung"), wenn f die Nachbarn eines jeden Knoten $v \in V(H)$ bijektiv auf die Nachbarn seines Bildknotens $f(v)$ abbildet.
Der Graph H heißt *Lift* von G und der Graph G *Quotient* von H, wenn es eine solche Abbildung von H nach G gibt. Für eine Ecke $v \in V(G)$ nennt man das Urbild $f^{-1}(v)$ die *Faser* von v.

Bemerkung 1: Die Überlagerungsabbildung $f : H \to G$ verträgt sich mit den Kanten der Graphen, das heißt für eine Kante $(u, v) \in E(H)$ ist $(f(u), f(v)) \in E(G)$ und jede Kante in $E(G)$ hat (mindestens) ein „Urbild" in H. Die Menge aller dieser Urbilder einer Kante $e \in E(G)$ heißt Faser von e.

Lemma 1:
Ist H ein endlicher Graph und Lift eines zusammenhängenden Graphen G, so gilt

$$|f^{-1}(v)| = |f^{-1}(u)| =: n \text{ für alle } u, v \in V(G).$$

Die Zahl n heißt *Überlagerungszahl* und der Lift wird n-Lift genannt.

Lemma 2:
Die Eigenwerte von G sind auch Eigenwerte eines jeden Lifts von G.

Lemma 3:
Sei $f : V(H) \to V(G)$ eine Überlagerung und ψ eine Eigenfunktion zu einem neuen Eigenwert von H.
Dann ist $\sum_{\substack{x \in V(H),\\ f(x)=v}} \psi(x) = 0$ für alle $v \in V(G)$. Das heißt, ψ summiert sich auf jeder Faser zu Null.

Überlagerungen durch Permutationen

Für einen zusammenhängenden Graphen G, lassen sich alle n-Lifts auf eine einfach Art und Weise darstellen und erzeugen. Für einen solchen n-Lift H gilt nach Lemma 1, dass

$$V(H) \equiv V(G) \times [n],$$

da $V(H)$ die (disjunkte) Vereinigung der Fasern von Ecken aus G ist.
Die Kanten von H entsprechen nun, als disjunkte Vereinigung der Fasern von Kanten aus G, der Wahl einer Permuation $\pi \in S_n$ für eine Kante $(u, v) \in E(G)$. Diese definiert die Faser von (u, v) durch

$$((u,i),(v,j)) \in E(H) \Leftrightarrow \pi(i) = j,\ i,j \in [n].$$

Ein in diesem Modell gegebener 2-Lift von G lässt sich durch folgende Modifikation der Adjazenzmatrix A von G eindeutig beschreiben:

$$\tilde{a}_{u,v} := \begin{cases} 1, & a_{u,v} = 1 \text{ und } \pi_{(u,v)} = id \\ -1, & a_{u,v} = 1 \text{ und } \pi_{(u,v)} = (12) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so erzeugte Matrix $\tilde{A}$ wird im Englischen „signing“ von A genannt.

Proposition 1:
Sei H ein 2-Lift von G und $\tilde{A}$ die entsprechend modifizierte Adjazenzmatrix („signing“).
Dann sind die Eigenwerte von $\tilde{A}$ gerade die Eigenwerte von H, die nicht von G induziert sind.

Vermutung 1:
Für jeden d-regulären Ramanujan Graph G gibt es einen 2-Lift, so dass alle Eigenwerte dieses Lifts, die nicht von G induziert sind, im Intervall $\left[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}\right]$ liegen.

Theorem 2:
Sei $d \geq 3$. Dann lässt sich eine Familie von (n, d, α)-Graphen konstruieren, für die $\alpha d = O\left(\sqrt{d \log^3 d}\right)$ gilt.
Die (n, d, α)-Graphen sind dabei d-reguläre Graphen mit n Knoten für die $max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} \leq \alpha d$ gilt.

3 Das Spektrum zufälliger Graphen

Im Folgenden wird ein 2d-regulärer Graph mit Hilfe des Permutationsmodells zufällig erzeugt.
Dazu werden die Kanten zwischen n gegebenen Ecken auf folgende Art definiert:
Es werden d (nicht notwendigerweise verschiedene) Permutationen $\pi_i \in S_n$ gleichverteilt gezogen.
Für jeden Knoten $v \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $i \in \{1, \ldots, d\}$ wird eine Kante $(v, \pi_i(v))$ erzeugt.

Theorem 3:
Für fast jeden 2d-regulären Graphen gilt

$$max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\} \in O\left(d^{\frac{3}{4}}\right).$$

Theorem 4:
Für jedes $\epsilon > 0$ und einen zufälligen d-regulären Graph mit n Ecken gilt

$$P\left(max\{|\lambda_1|, |\lambda_n|\} \leq 2\sqrt{d-1} + \epsilon\right) = 1 - o_n(1).$$