Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Tobias Columbus

### Seminar im Sommersemester 2012 zum Thema

# Ausgewähltes aus der homologischen Algebra

### Vortragsthemen

## 1 Homologie von topologischen Räumen

In den ersten beiden Vorträgen werden wir zwei Homologietheorien – die *simpliziale* und die *singuläre Homologie* von topologischen Räumen – definieren und einige ihrer Eigenschaften studieren. Diese beiden Homologietheorien werden uns vor allem als Motivation dienen und im Laufe des Seminars eventuell das ein oder andere Beispiel abwerfen.

### 1.1 Grundlegende Topologie, $\Delta$-Komplexe und simpliziale Homologie — Simon

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag werden wir uns mit topologischen Räumen, stetigen Abbildungen und Homotopien beschäftigen. Als Spezialfall von topologischen Räumen betrachten wir sogenannte $\Delta$-Komplexe und definieren eine wichtige Invariante dieser Räume – die simplizialen Homologiegruppen $\mathrm{H}_*^{\Delta}(-)$.

Stichworte: Topologischer Raum, stetige Abbildung, Homotopie, $\Delta$-Komplex, simpliziale Homologie

Literatur: Topologische Grundlagen stehen in [Küh08, Kapitel 2–3] oder [Die08, Chapter 1]. $\Delta$-Komplexe und simpliziale Homologie werden in [Hat02, S. 102–107] definiert.

### 1.2 Singuläre Homologie und Eigenschaften der singulären Homologie — Moritz

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag werden wir die Definition der simplizialen Homologiegruppen $\mathrm{H}_*^{\Delta}(-)$ verallgemeinern und die singulären Homologiegruppen $\mathrm{H}_*^{\mathrm{sing}}(-)$ eines topologischen Raumes einführen. Letztere sind technisch besser zu handhaben und genügen insbesondere den Axiomen von Eilenberg und Steenrod – eine Tatsache, die wir nur zitieren und nicht beweisen wollen. Schließlich wollen wir noch den Zusammenhang zwischen der singulären Homologiegruppe $\mathrm{H}_1^{\mathrm{sing}}(X)$ und der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ eines wegzusammenhängenden Raumes $X$ studieren.

Stichworte: Singuläre Homologie, Axiome von Eilenberg und Steenrod, Fundamentalgruppe und $\mathrm{H}_1^{\mathrm{sing}}(-)$.

Literatur: Die Konstruktion der singulären Homologie steht unter anderem in [Hat02, S. 108–110], [Die08, S. 223–225] oder [Lüc05, S. 19–24]. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome sind in [Lüc05, S. 1–3] oder auch [Die08, Chapter 10.1] aufgeführt. Den Zusammenhang zwischen der ersten singulären Homologiegruppe und der Fundamentalgruppe ist in [Hat02, S. 166–168] oder [Die08, S. 227–228] ausgearbeitet.

## 2 Homologie von Kettenkomplexen

Im zweiten Abschnitt des Seminars werden wir uns vor allem mit der abstrakten Maschinerie hinter Homologie- und Kohomologietheorien beschäftigen. Zum Teil werden wir mit Hilfe des algebraischen Apparats einige Beweise von Aussagen über die singuläre Homologie nachreichen oder plausibel machen können. Am Ende werden wir sogar weitere Homologiegruppen von topologischen Räumen ausrechnen können.

### 2.1 Kettenkomplexe und abelsche Kategorien — Miriam

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag wird es darum gehen, den natürlichen Lebensraum der homologischen Algebra – die *abelschen Kategorien* und die *Kategorie der Kettenkomplexe* – zu erkunden. Kettenkomplexe und deren Homologiegruppen sind uns bereits in den ersten beiden Vorträgen begegnet. Sie sollen nun formal definiert und losgelöst vom topologischen Kontext betrachtet werden. Dabei wird offensichtlich werden, dass Kettenkomplexe und deren Abbildungen sich ähnlich verhalten wie abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen oder $R$-Moduln und $R$-lineare Abbildungen. Die Definition einer abelschen Kategorie formalisiert genau diese Gemeinsamkeiten.

Stichworte: Kettenkomplexe, Homologie von Kettenkomplexen, Abelsche Kategorie

Literatur: Eigentlich findet sich alles in [Wei95, S. 1–10]. Zur Ergänzung kann teilweise auch [Lan02, S. 133–134, 761–767] oder [Gro57, Chapitres 1.1–1.4] herangezogen werden.

### 2.2 Diagrammjagden und lange exakte Homologiesequenz — Sven

Kurze Beschreibung: Die Analogie zwischen abelschen Kategorien und der Kategorie der $R$-Moduln über einem Ring $R$ kann formalisiert und bewiesen werden. Wir wollen dieses Resultat – die Freyd-Mitchell-Einbettung – nur zitieren und für den Beweis dreier technischer Lemmata – dem Schlangen-, Fünfer- und $3 \times 3$-Lemma – nutzen. Mit Hilfe dieser Lemmata lässt sich dann die Existenz einer langen exakten Sequenz von Kohomologiegruppen für jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen nachweisen. Diese lange exakte Sequenz ist eines der wichtigsten Hilfsmittel zur tatsächlichen Berechnung von Homologiegruppen.

An dieser Stelle haben wir endlich genügend homologische Algebra zur Hand um die Konstruktion der relativen Homologiegruppen $\mathrm{H}_*^{\mathrm{sing}}(-,-)$ und der langen, exakten Homologiesequenz zu erklären.

Stichworte: Freyd-Mitchell-Einbettung, Schlangen-, Fünfer- und $3 \times 3$-Lemma, lange, exakte Homologiesequenz

Literatur: Wieder ist die Hauptquelle [Wei95, S. 10–15, 25–29]. Zum Teil kann [Lan02, S. 157–159, 169, 767–769] als Ergänzung dazu benutzt werden. In den Büchern [Lüc05, S. 3–5] oder [Hat02, S. 115–118] findet man die topologischen Anwendungen.

### 2.3 Kettenhomotopien, Abbildungskegel und -zylinder — Benni

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag wollen wir Homotopien zwischen Abbildungen von Kettenkomplexen studieren. Wir werden sehen, dass zwei homotope Abbildungen dieselben Abbildungen auf der Homologie induzieren. Wir werden ohne detaillierten Beweis akzeptieren, dass topologisch homotope Abbildungen homotope Abbildungen zwischen den singulären Kettenkomplexen und somit dieselbe Abbildung auf der Homologie induzieren.

Schließlich wollen wir die Frage, ob eine Abbildung von Kettenkomplexen Isomorphismen zwischen den Homologiegruppen induziert auf die Frage nach der Exaktheit bestimmter Kettenkomplexe – dem Abbildungskegel und dem Abbildungszylinder – zurückführen.

Stichworte: Kettenhomotopie, Abbildungskegel, Abbildungszylinder

Literatur: Der gesamte algebraische Apparat ist in [Wei95, S. 15–24] zu finden. Die topologischen Anwendungen der Kettenhomotopie sind in [Lüc05, S. 24–27], [Hat02, S. 110–113] oder [Die08, S. 228–230] ausgearbeitet.

### 2.4 Sequenz eines Tripels, Mayer-Vietoris-Sequenz und $\mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(S^k)$ — Thorsten

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag wollen wir noch einmal zur singulären Homologie $\mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(-)$ von topologischen Räumen zurückkehren. Zuerst wollen wir unter Verwendung der Eilenberg-Steenrod-Axiome die Existenz zweier langer exakter Sequenzen – der Sequenz eines Tripels und der Mayer-Vietoris-Sequenz eines Pushouts – nachweisen. Mit Hilfe dieser langen exakten Sequenzen und ein wenig Topologie lassen sich dann die Homologiegruppen $\mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(S^k)$ der Sphären berechnen.

Stichworte: Lange exakte Sequenz eines Tripels $(X, B, A)$, Mayer-Vietoris-Sequenz, Einhängungsisomorphismus, Homologie von Sphären

Literatur: Der vollständige Inhalt des Vortrags ist in [Lüc05, S. 4–10] zu finden. Zur Veranschaulichung oder Ergänzung können sowohl [Hat02, S. 118–119, 149–150] als auch [Die08, S. 244–249, 265–269] herangezogen werden.

# 3 Derivierte Funktoren und $\delta$-Funktoren

In den nächsten beiden Vorträgen lernen wir eine sehr abstrakte Konstruktion und Axiomatisierung von Homologie- und Kohomologietheorien kennen – die derivierten Funktoren und die $\delta$-Funktoren. Beide Begriffe sind in der algebraischen Geometrie von zentraler Bedeutung, finden aber auch Anwendung in der reinen Algebra oder der Topologie.

## 3.1 Projektive und injektive Auflösungen, Derivierte Funktoren — David

Kurze Beschreibung: In hinreichend gutmütigen, abelschen Kategorien besitzt jedes Objekt eine bis auf Homotopie eindeutige Auflösung durch Projektive oder Injektive. Gutmütig in diesem Sinne sind zum Beispiel die Kategorie der abelschen Gruppen oder die Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum.

Die Existenz von injektiven oder projektiven Auflösungen erlaubt es uns, die Rechts- bzw. Linksableitungen eines links- bzw. rechtsexakten Funktors zwischen zwei abelschen Kategorien zu definieren. Beispiele solcher Ableitungen sind $\mathrm{Tor}_i(-,-)$, $\mathrm{Ext}^i(-,-)$ oder $\lim^1$.

Stichworte: Genügend Injektive bzw. Projektive, Auflösung durch Injektive bzw. Projektive, Rechts- bzw. Linksableitung eines links- bzw. rechtsexakten Funktors

Literatur: Die Hauptquelle ist [Wei95, S. 33–36, 38–44, 49–51, 80–85]. Dort sind auch Aussagen zu finden, die es erlauben festzustellen, ob eine Kategorie genügend viele Injektive oder Projektive hat. Eine ebenfalls sehr gute Quelle zu diesem Thema ist [Lan02, S. 790–799]. Schließlich werden derivierte Funktoren auch in [Gro57, Chapitre 2.3] definiert und kurz untersucht.

## 3.2 $\delta$-Funktoren und universelle $\delta$-Funktoren — Jonathan

Kurze Beschreibung: $\delta$-Funktoren sind eine sehr abstrakte Axiomatisierung von Homologie- oder Kohomologiefunktoren. Universelle $\delta$-Funktoren sind bezüglich einer bestimmten Eigenschaft universell und deshalb bereits in gewissem Sinne eindeutig bestimmt. Dies ist für uns von großem Interesse, da die Homologie von Kettenkomplexen und die im vorhergehenden Vortrag eingeführten abgeleiteten Funktoren stets universelle $\delta$-Funktoren. Dies wollen wir beweisen und eventuell einige Anwendungen der Universalität dieser Funktoren sehen.

Stichworte: $\delta$-Funktor, universeller $\delta$-Funktor, auslöschbare Funktoren, Dimensionsverschiebung

Literatur: Die Hauptquelle ist erneut [Wei95, S. 30–32, 37–38, 45–49]. Alternativ kann man auch [Lan02, S. 799–806] oder [Gro57, Chapitres 2.1 & 2.2] lesen.

# 4 Spektralsequenzen

In den letzten drei Vorträgen des Seminars werden wir uns mit einem weiteren algebraischen Instrument – den sogenannten Spektralsequenzen – beschäftigen. Dabei möchten wir zum einen eine Anwendung in der Topologie – die Serre-Spektralsequenz – verstehen und zum anderen genügend über den algebraischen Apparat lernen, um ihn auch ohne allzu große Hürden in anderen Situationen benutzen zu können.

## 4.1 Spektralsequenzen und deren Konvergenz — Julian

Kurze Beschreibung: Spektralsequenzen sind so etwas wie sehr komplizierte, lange exakte Sequenzen. Genau wie bei diesen auch, gibt es keine Garantie dafür, dass man mit Spektralsequenzen sinnvolle Informationen berechnen kann. In diesem Vortrag wird es vor allem darum gehen, Spektralsequenzen und dazugehörige Begriffe – wie Filtrierung, Beschränktheit oder Konvergenz – zu motivieren und einfache aber recht technische Resultate zu beweisen.

Stichworte: Spektralsequenz, Filtrierung, Konvergenz

Literatur: Eine sehr gründliche Einführung in Spektralsequenzen steht in [Wei95, S. 120–127, 131–136]. Mehr oder weniger dieselben Definitionen aber schwächere Aussagen findet man in [Lan02, S. 814–819] oder [God58, S. 75–86]. Schließlich kann man auch noch [McC01, S. 3–9, 28–37] zu Rate ziehen.

## 4.2 Spektralsequenz eines Doppelkomplexes und eines exakten Paares — Christian

Kurze Beschreibung: In diesem Vortrag werden wir zwei häufig auftretende Situationen studieren, in denen man Spektralsequenzen erhält.

Zum einen gibt es zu jedem Doppelkomplex zwei Spektralsequenzen, die man in vielen Situationen gegeneinander ausspielen kann. Elementare Anwendungen dieser Spektralsequenzen sind zum Beispiel die Balanciertheit von Tor und Ext, die Künneth-Spektralsequenz, die Künneth-Formel oder das universelle Koeffiziententheorem.

Zum anderen wollen wir sogenannte exakte Paare studieren. Exakte Paare tauchen auf natürliche Art und Weise in der Topologie auf und werden uns wahrscheinlich im letzten Vortrag noch einmal begegnen.

Stichworte: Spektralsequenz eines Doppelkomplexes, Exakte Paare

Literatur: Den vollständigen Inhalt des Vortrags findet man in [Wei95, S. 141–145, 153–159]. Alternativ kann man auch in [McC01, S. 37–44, 46–53] nachschlagen. Exakte Paare werden außerdem in [Hat04, S. 1–7] sehr schön motiviert und eingeführt.

Kurze Beschreibung: Abschließend wollen wir in der Topologie noch eine Spektralsequenz in Aktion erleben. Dazu führen wir den Begriff einer Faserung $F \to E \to B$ ein und konzentrieren uns auf den einfachen Fall einer wegzusammenhängenden Basis $B$ mit $\pi_1(B, *) = 1$. In dieser Situation existiert eine Spektralsequenz, die es erlaubt die Homologie des Totalraumes $E$ mit Hilfe der Homologien der Basis $B$ und der Faser $F$ zu berechnen. So lässt sich zum Beispiel die Homologie der Schleifenräume $\Omega S^n$ für $n > 1$ berechnen.

Stichworte: Serre-Faserung, Serre-Spektralsequenz

Literatur: In [Hat04, S. 8–13] wird die Serre-Spektralsequenz unter Benutzung der zellulären Homologie konstruiert. In [Hu59, S. 259–277] wird eine Variante der singulären Homologie mit Würfeln anstatt mit Standard-Simplizes für die Konstruktion verwendet. Einen Beweis der (fast) nur Methoden benutzt, die uns bekannt sind, findet man in [McC01, S. 167–174]. Ergänzend dazu kann man noch [Dre67] lesen.

## Literatur

Die Literaturangaben sind als ein Hinweis zu verstehen. Es gibt noch viele andere Quellen als diejenigen, die hier aufgelistet sind.

[Die08] Tammo tom Dieck. *Algebraic Topology.* EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society, 2008.

[Dre67] Andreas Dress. “Zur Spectralsequenz von Faserungen”. In: *Inventiones Mathematicae* 3 (2 1967). `http://dx.doi.org/10.1007/BF01389743`, S. 172–178.

[God58] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Bd. 1252. Actualités Scientifiques et Industrielles. Hermann, 1958.

[Gro57] Alexandre Grothendieck. “Sur quelques points d’algèbre homologique”. In: *Tôhoku Mathematical Journal (2)* 9 (1957), S. 119–221.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[Hat04] Allen Hatcher. *Spectral Sequences in Algebraic Topology.* `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html`. 2004.

[Hu59] Sze-Tsen Hu. *Homotopy Theory.* Pure and applied mathematics. Academic Press, 1959.

[Küh08] Stefan Kühnlein. *Topologie.* `http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/top2007w/media/toposkript.pdf`. 2008.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra.* Bd. 211. Graduate texts in mathematics. Springer, 2002.

[Lüc05] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten.* Vieweg Studium. Vieweg, 2005.

[McC01] John McCleary. *A User’s Guide to Spectral Sequences.* Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[Wei95] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Bd. 38. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1995.