Singuläre Homologie

Moritz Gruber

29. April 2012

1 Singuläre Homologie

1.1 Definition: Singulärer Simplex

Sei X ein topologischer Raum.
Ein **singulärer n-Simplex** ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$

Durch „singulär" wird darauf hingewiesen, dass σ keine schöne Einbettung sein muss, sondern auch Singularitäten auftreten dürfen.

1.2 Definition: Ketten und Randabbildung

Sei C_n die freie abelsche Gruppe mit den singulären n-Simplizes als Basis. Dann bezeichnen wir die Elemente von C_n als **n-Ketten**. Also sind n-Ketten endliche formale Summen $\sum \lambda_i \cdot \sigma_i$, wobei $\sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X$ und $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

Wir können jetzt **Randabbildungen** $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ definieren durch

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{|\Delta_i^n}$$

wobei $\Delta_i^n = \langle P_0, ..., \hat{P}_i, ..., P_n \rangle$

Meistens bezeichnet man ∂_n einfach nur mit ∂.

Es gilt: $\partial^2 = 0$

Eine Kette $z_q \in C_q$ heißt **Zyklus**, falls $\partial z_q = 0$.

Eine Kette $b_q \in C_q$ heißt **Rand**, falls es eine q+1-Kette $c_{q+1} = \sum_i \lambda_i \sigma_i \in C_{q+1}$ gibt, sodass $b_q = \partial c_{q+1} = \sum_i \lambda_i \sigma_{i|\partial \Delta_i^{q+1}}$. Ränder sind natürlich auch Zykel.

1.3 Definition: Singuläre Homologiegruppe

Wie im simplizialen Fall definieren wir die **n-te Homologiegruppe** durch

$$H_n(X) = kern(\partial_n)/Bild(\partial_{n+1})$$

1.4 ...nur ein Spezialfall

Obwohl die singuläre Homologie viel allgemeiner aus sieht, ist sie ein Spezialfall der simplizialen Homologie:

Wir definieren den **singulären Komplex** $S(X)$ als den Simplizialkomplex, der einen n-Simplex Δ_σ^n für jeden singulären Simplex $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ enthält, so dass die Seiten von Δ_σ^n gerade zu der Restriktion von σ auf die entsprechenden Seiten von Δ^n passen.

Dann gilt offensichtlich:

$$H_n^\Delta(S(X)) \cong H_n(X)$$

Daher ist in diesem Sinn die singuläre Homologie ein Spezialfall der simplizialen Homologie, da man S(X) als ein simpliziales Model für X betrachten kann. S(X) wird im Allgemeinen allerdings ein mit X verglichen sehr großes Objekt sein.

1.5 Satz: Direkte Summe

Sei X ein topologischer Raum und X_j , $j \in J$ seine Wegzusammenhangskomponenten. Dann gilt:

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{j \in J} H_n(X_j)$$

Beweis:

Da das Bild eines singulären Simplex immer wegzusammenhängend ist, zerfällt auch $C_n(X)$ als direkte Summe ihrer Untergruppen $C_n(X_j)$. Die Randabbildung ∂ respektiert diese Zerlegung, somit zerfallen auch $Kern(\partial_n)$ und $Bild(\partial_{n+1})$ in dieser Weise und damit auch die Homologiegruppen. □

1.6 Dimensionssatz

Sei $X = \{*\}$ der Einpunktraum. Dann gilt: $H_q(X) \cong \begin{cases} 0, & q \geq 1 \\ \mathbb{Z}, & q = 0 \end{cases}$

Beweis:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen singulären Simplex $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow X$.
Es gilt: $\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_{n-1}$

Die Summe hat n+1 Summanden, daher gilt für $n \neq 0$: $\quad \partial\sigma_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$

So erhalten wir den Kettenkomplex $\quad ... \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$

mit Randabbildung abwechselnd Isomorphismus und triviale Abbildung, Ausnahme die letzte.
Daraus folgt die Behauptung. □

2 π_1 und H_1^{sing}

2.1 Erinnerung: Fundamentalgruppe

Eine **Schleife** mit Basispunkt x_0 ist eine Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Zwei Schleifen γ, η heißen **homotop**, falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ gibt mit $H(0,\cdot) = \gamma$ und $H(1,\cdot) = \eta$ und $H(\cdot,0) = H(\cdot,1) = x_0$.

Die Verknüpfung von Homotopieklassen von Schleifen ist definiert durch $[\gamma] \circ [\eta] = [\gamma \circ \eta]$ wobei
$(\gamma \circ \eta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ \eta(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad$ für $t \in [0,1]$

Die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X, x_0)$ ist die Gruppe der Homotopieklassen von Schleifen mit Basispunkt x_0.

2.2 Vorbereitung

Zuerst sammeln wir einige Fakten über Homotopie und Homologie:

Seien f und g Schleifen in X. Wir sehen, dass f und g dann auch Zyklen sind, da $\partial f = f(1) - f(0) =$ (Das gleiche gilt für g).

Dann gilt:

(i) Ist f konstant, so gilt $\quad f \sim 0$
Denn f ist ein Zyklus, da f eine Schleife ist und da $H_1(\{*\}) = 0$ muss f auch ein Rand sein.

(ii) Ist $f \simeq g \quad$ so auch $\quad f \sim g$
Denn: Sei $F : I \times I \longrightarrow X$ eine Homotopie von f nach g. Zerteilt man nun das Quadrat $I \times I$ in zwei Dreiecke, so erhält man zwei 2-Simplizes σ_1 und σ_2. Wenn man nun $\partial(\sigma_1 - \sigma_2)$ berechnet, kürzen sich die zwei Restriktionen von F auf die Diagonale weg und es bleiben $f - g$ und zwei konstante 1-Simplizes, die rechten und linken Kanten des Quadrates übrig. Nach (i) sind die konstanten Simplizes Ränder, also ist auch $f - g$ ein Rand.

(iii) $(f \circ g) \sim (f + g)$
Denn: Definiere $\gamma : \Delta^2 \longrightarrow X$ als $f \circ g : \langle P_0, P_2 \rangle \longrightarrow X$ nach der orthogonalen Projektion von $\Delta^2 = \langle P_0, P_1, P_2 \rangle$ auf die Kante $\langle P_0, P_2 \rangle$, so gilt: $\partial\gamma = g - (f \circ g) + f$

(iv) $f^{-1} \sim -f$, wobei f^{-1} den zu f inversen Weg bezeichnet.
Aus (i)+(ii)+(iii) ergibt sich: $f + f^{-1} \sim f \circ f^{-1} \sim 0$

2.3 Satz

Wir fassen Schleifen als 1-Zykel auf und erhalten so einen Homomorphismus $h : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$. Wenn X wegzusammenhängend ist, so ist h surjektiv mit dem Kommutator von $\pi_1(X, x_0)$ als Kern. Es gilt also:

$$\pi_1(X, x_0)/K \cong H_1(X) \quad \text{wobei} \quad K := [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Beweis:

Aus (ii) und (iii) folgt, dass h ein wohldefinierter Homomorphismus ist, der die Homotopieklasse einer Schleife γ auf die Homologieklasse des 1-Zyklus γ schickt.

Sei X wegzusammenhängend. Nehmen wir einen 1-Zyklus $f = \sum_i n_i \cdot \sigma_i$, der ein Element von $H_1(X)$ repäsentiert. Durch Umbenennen der σ_i's können wir alle n_i als ± 1 annehmen, durch (iv) sogar $n_i = +1$. Somit gilt: $f = \sum_i \sigma_i$

Angenommen es gibt ein σ_i das keine Schleife ist, dann folgt aus der Bedingung $\partial f = 0$, dass ein σ_j existiert, sodass $\sigma_i \circ \sigma_j$ definiert ist. Mit (iii) können wir diese beiden dann zu einen Term zusammenfassen. Auf diese Weise erhalten wir iterativ, dass jedes σ_i eine Schleife ist. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg η_i von x_0 zum Basispunkt von σ_i. Dann ist nach (iii) und (iv) $\eta_i \circ \sigma_i \circ \eta_i^{-1}$ homolog zu σ_i und alle σ_i können somit als Schleifen mit Basispunkt x_0 aufgefasst werden. Also können wir wegen (iii) alle σ_i als ein σ zusammenfassen. Wir erhalten also: $f = h(\sigma)$. Somit ist h surjektiv.

$K \subset Kern(h)$ ist klar, da $H_1(X)$ abelsch. Für die andere Inklusion zeigen wir, dass jedes $[f] \in Kern(h)$ in $\pi_1(X, x_0)/K$ trivial ist.
Ist ein $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ im Kern von h, so ist f, als Zyklus, ein Rand einer 2-Kette $\sum_i n_i \cdot \sigma_i$. Wir können wieder annehmen, dass $n_i = \pm 1$. Wir ordnen dieser 2-Kette einen Δ-Komplex D zu, indem wir für jedes σ_i einen 2-Simplex Δ_i^2 nehmen und die ensprechenden Kanten mit einander identifizieren. Denn durch das Verwenden der Randabbildungsformel $\partial\sigma_i = \tau_{i0} - \tau_{i1} - \tau_{i2}$ mit singulären 1-Simplizes τ_{ij}, folgt aus der Formel $f = \partial(\sum_i n_i \cdot \sigma_i) = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \cdot \tau_{ij}$, dass wir alle τ_{ij}, bis auf eines, in Paaren gruppieren können, sodass Koeffizienten $(-1)^j n_i$ in jedem Paar $+1$ und -1 sind. Das verbleibende τ_{ij} ist f. Denn f ist ein singuläres 1-Simplex und somit teil der Basis von $C_1(X)$, genau so wie die τ_{ij}. Wegen der eindeutigen Basis Darstellung muss also ein τ_{ij} mit f übereinstimmen und die anderen verschwinden.
Dann identifizieren wir die Kanten der Δ_j^2 so wie wir die τ_{ij} gruppiert haben, erhalten dabei deren Orientierung, und bilden so den Δ-Komplex D.

Die Abbildungen σ_i lassen sich zu einer Abbildung $\sigma : D \longrightarrow X$ zusammenfügen. Diese können wir so verformen, dass sie auf der zu f gehörenden Kante gleich bleibt und alle Ecken auf den Basispunkt x_0 abbildet.

Schränken wir das neue σ auf die Simplizes Δ_i^2 ein, so erhalten wir eine neue Kette $\sum_i n_i \cdot \sigma_i$ mit f als Rand und so, dass alle τ_{ij} Schleifen mit Basispunkt x_0 sind. Mit der additiven Schreibweise in $\pi_i(X, x_0)/K$ bekommen wir wegen den sich auslöschenden τ_{ij} die Formel $[f] = \sum_{i,j} (-1)^j n_i \cdot [\tau_{ij}]$. Wir können die Summe $\sum_{i,j} (-1)^j n_i \cdot [\tau_{ij}]$ durch $\sum_i n_i \cdot [\partial\sigma_i]$ ersetzen, wobei $[\partial\sigma_i] = [\tau_{i0}] - [\tau_{i1}] + [\tau_{i2}]$. Da σ_i eine Nullhomotopie für den verketteten Weg $\tau_{i0} - \tau_{i1} + \tau_{i2}$ liefert (der Rand eines Dreiecks ist nullhomotop), ist auch $[f] = 0$ in $\pi_1(X, x_0)/K$.

□

3 Axiome einer Homologietheorie

3.1 Vorraussetzungen

TOP^2 sei die Kategorie der Paare von topologischen Räumen, Objekte sind von der Form (X, A) mit $A \subset X$.
Ein $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppe ist eine Familie $\{H_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ von abelschen Gruppen.

3.2 Axiome von Eilenberg und Steenrod

Eine Homologietheorie $\mathcal{H}_* = (\mathcal{H}_*, \partial_*)$ ist eine Abbildung

$$\mathcal{H}_* : TOP^2 \longrightarrow \mathbb{Z} - grad. - abelscheGruppen$$

(also $\mathcal{H}_*(X, A) = \{H_q(X, A)\}_{q\in\mathbb{Z}}$)
zusammen mit Homomorphismen $\partial_q : H_q(X, A) \longrightarrow H_{q-1}(A, \emptyset) := H_{q-1}(A)$, sodass jeder Abbildung $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ und allen $q \in \mathbb{Z}$ einen Homomorphismus $\mathcal{H}_q(f) := f_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B)$ zuordnet, sodass gilt: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und $Id_* = Id$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_q(X,A)"] \arrow[d, "f_*"'] & H_{q-1}(A) \arrow[d, "f_{|A*}"] \\
H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_q(Y,B)"'] & H_{q-1}(B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. (kurz: $\mathcal{H}_*$ ist ein kovarianter Funktor und ∂_* eine natürliche Transformation)
Außerdem sollen die folgenden Axiome erfüllt sein:

a) **Homotopieinvarianz**
Seien $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ homotope Abbildungen von Paaren, dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$f_* = g_* : H_q(X, A) \longrightarrow H_q(Y, B) \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

b) **Lange exakte Sequenz von Paaren**
Für jedes Paar (X,A) ist folgende nach links und rechts unendlich lange Sequenz exakt:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+1}(X,A)} H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_q(X,A)} H_{q-1}(A) \xrightarrow{H_{q-1}(X)} H_{q-1}(X) \xrightarrow{H_{q-1}(j)} H_{q-1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{q-1}(X,A)} \ldots$$

wobei $i : A \longrightarrow X$ und $j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ Inklusionen sind, und (wie oben) $H_q(Y) = H_q(Y, \emptyset)$.

c) **Ausschneidung**
Seien $A \subseteq B \subseteq X$ Unterräume des Raumes X, sodass der Abschluss $\overline{A}$ von A im Inneren B° von B liegt. Dann induziert die Inklusion $i : (X \setminus A, B \setminus A) \longrightarrow (X, B)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus:

$$H_q(i) : H_q(X \setminus A, B \setminus A) \longrightarrow H_q(X, B)$$

d) **Dimensionsaxiom** (wird nicht immer gefordert)
Für den Einpunktraum $\{*\}$ gilt:

$$H_q(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \{0\}, & q \neq 0 \end{cases}$$

Dieses Axiom wurde klassisch von Eilenberg und Steenrod gefordert. Früher waren nur Homologietheorien bekannt die es erfüllten. Später entdeckte man auch welche, die das Dimensionaxiom verletzten (s. Bordismustheorien). Wir sehen auch, dass die singuläre Homologie es erfüllt.

e) **Disjunkte Vereinigung** (wird nicht immer gefordert)
Für eine Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ und eine Indexmenge I gilt:

$$\bigoplus_{i\in I} H_q(X_i) \cong H_q(\amalg_{i\in I} X_i) \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

3.3 Warum diese Axiome

- Axiom 1 : klar
- Axiom 2 : hilfreich für Berechnungen
- Axiom 3 : wenn was ausgeschnitten, soll es das Außenrum nicht beeinflussen
- Axiom 4+5 : geometrisch motiviert

- meisten Homologietheorien (sing. , zellulär) erfüllen diese –> allgmeine Beweise liefern Ergebnisse für alle

- Eindeutigkeitssätze

3.4 Spaltungslemma

Sei $\quad A \xrightarrow{q} B \xrightarrow{r} C$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen und q injektiv. Weiter existiere ein Homomorphismus $\quad u : C \longrightarrow B \quad$ mit $r \circ u = Id_C$.

Dann gilt: $\quad B \cong A \oplus C$

Beweis:

Es gilt $\quad B = kern(r) \oplus bild(u) \quad$ *da für alle* $b \in B$ *gilt* $b = (b - (u \circ r)(b)) + (u \circ r)(b)$ *und aus* $r(b) = 0$ *und* $u(c) = b \quad$ *folgt* $\quad 0 = r(b) = (r \circ u)(c) = c$.
Wegen der Exaktheit ist $\quad bild(q) = kern(r) \quad$ *und wegen der Injektivtät ist* $\quad bild(q) \cong A$. *Da* $r \circ u$ *bijektiv ist, ist auch* u *injektiv und somit* $bild(u) \cong C$. *Also gilt* $B \cong A \oplus C$ □

3.5 Satz: Direkte Summe

Sei $\mathcal{H}_*$ eine Homologietheorie, die die Axiome a), b), c) und d) erfüllt und seien X und Y topologische Räme. Dann gilt:

$$H_q(X \amalg Y) \cong H_q(X) \oplus H_q(Y) \qquad \forall q \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

Seien $i_X : X \hookrightarrow X \amalg Y$ *und* $i_Y : Y \hookrightarrow X \amalg Y$ *die Inklusionsabbildungen.*
Nach Axiom b) erhalten wir die lange exakte Sequenz:

$$... \xrightarrow{\partial_*} H_q(X) \xrightarrow{i_{X*}} H_q(X \amalg Y) \xrightarrow{j_*} H_q(X \amalg Y, X) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X) \xrightarrow{i_{X*}} ...$$

Aus Axiom c) wissen wir dass von der Inklusion $k : (Y, \emptyset) \hookrightarrow (X \amalg Y, X)$ *ein Isomorphismus* $k_* : H_q(Y) \longrightarrow H_q(X \amalg Y, X)$ *induziert wird. Mit* $\hat{j}_* = k_*^{-1} \circ j_*$ *und* $\hat{\partial}_* = \partial_* \circ k_*$ *ergibt sich:*

$$... \xrightarrow{\hat{\partial}_*} H_q(X) \xrightarrow{i_{X*}} H_q(X \amalg Y) \xrightarrow{\hat{j}_*} H_q(Y) \xrightarrow{\hat{\partial}_*} H_{q-1}(X) \xrightarrow{i_{X*}} ...$$

Weiter ist $(k_*^{-1} \circ j_*) \circ i_{Y*} = Id_{H_q(Y)}$ *da* $j \circ i_Y = k$ *, es ist also* i_{Y*} *das u aus dem Lemma und* $\hat{j}_* = k_*^{-1} \circ j_*$ *surjektiv. Daher folgt, dass* i_{X*} *injektiv ist, da wegen der Exaktheit*

$$kern(\partial) = bild(\hat{j}) = H_q(Y) \quad \text{und somit} \quad kern(i_{X*}) = bild(\partial) = 0$$

Mit dem Spaltungslemma folgt die Behauptung. □

Literatur

Allen Hatcher, *„Algebraic Topology"* , Camebridge University Press, 2001

Wolfgang Lück, *„Algebraische Topologie"* , Vieweg, 2005