Kettenkomplexe und abelsche Kategorien

Miriam Schwab

04.05.2012

1 Komplexe von R-Moduln

1.1 Kettenkomplexe

Ein *Kettenkomplex* $C_.$ von R-Moduln ist eine Familie $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln zusammen mit R-Modul-Homomorphismen $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$, so dass jede Komposition $d \circ d : C_n \to C_{n-2}$ Null ist. Die Abbildungen d_n heißen *Differentiale* von $C_.$.

Der Kern von d_n heißt der *Modul der n-Zykel* von $C_.$, bezeichnet mit $Z_n = Z_n(C_.)$, das Bild von $d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n$ heißt der *Modul der n-Ränder* von $C_.$ und wird mit $B_n = B_n(C_.)$ bezeichnet.
Wegen $d \circ d = 0$ gilt:

$$0 \subseteq B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n \ \forall n$$

$H_n(C_.) = Z_n/B_n$ heißt der *n-te Homologiemodul* von $C_.$.

1.2 Die Kategorie der Kettenkomplexe

Es sei $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{mod} - \mathfrak{R})$ die *Kategorie der Kettenkomplexe* von R-Moduln, deren Objekte die Kettenkomplexe sind. Ein *Morphismus* $u : C_. \to D_.$ *von Kettenkomplexen* ist eine Kettenkomplexabbildung, d.h. eine Familie von R-Modul-Homomorphismen $u_n : C_n \to D_n$, so dass gilt:

$$u_{n-1}d_n = d_n u_n$$

Bemerkung: Ein Morphismus $u : C_. \to D_.$ von Kettenkomplexen bildet Ränder auf Ränder und Zykel auf Zykel ab, insbes. $H_n(C_.) \to H_n(D_.)$. Jedes H_n ist ein Funktor von $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{mod} - \mathfrak{R})$ nach $\mathfrak{mod} - \mathfrak{R}$.

1.3 Quasi-Isomorphismen

Ein Morphismus $C_. \to D_.$ von Kettenkomplexen heißt *Quasi-Isomorphismus*, falls die Abbildungen $H_n(C_.) \to H_n(D_.)$ alle Isomorphismen sind.

1.4 Kokettenkomplexe, Kohomologie

Durch Neuindizierung $C^n = C_{-n}$ erhält man folgende Notationsvariante:
Ein *Kokettenkomplex* $C^\cdot$ von R-Moduln ist eine Familie $\{C^n\}$ von R-Moduln zusammen mit Abbildungen $d^n : C^n \to C^{n+1}$ mit $d \circ d = 0$.

$Z^n(C^\cdot) = Kern(d^n)$ ist der *Modul der n-Kozykel*, $B^n(C^\cdot) = Bild(d^{n-1}) \subseteq C^n$ ist der *Modul der n-Koränder* und der Quotient $H^n(C^\cdot) = Z^n/B^n$ ist der *n-te Kohomologiemodul* von $C^\cdot$.

Die Definitionen von Morphismen und Quasi-Isomorphismen von Kokettenkomplexen sind analog zu jenen von Kettenkomplexen.

1.5 Beschränkte Kettenkomplexe

Ein Kettenkomplex $C_\cdot$ heißt *beschränkt*, falls fast alle C_n Null sind. Falls $C_n = 0$ für alle n außer $a \leq n \leq b$, sagt man der Komplex hat *Amplitude* in $[a,b]$.
Ein Komplex heißt *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls eine Schranke b (bzw. a) existiert mit $C_n = 0\ \forall n > b$ (bzw. $n < a$).
Die beschränkten (bzw. nach oben bzw. unten beschränkten) Kettenkomplexe bilden eine volle Unterkategorie von $\mathfrak{Ch} = \mathfrak{Ch}(\mathfrak{mod} - \mathfrak{R})$, bezeichnet mit $\mathfrak{Ch}_\mathsf{b}$ bzw. $\mathfrak{Ch}_-$ bzw. $\mathfrak{Ch}_+$. Die Unterkategorie $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}$ enthält alle nicht-negativen Kettenkomplexe.

Ein Kokettenkomplex $C^\cdot$ heißt *nach unten beschränkt*, falls $C_\cdot$ nach oben beschränkt ist (und andersrum) und einfach nur *beschränkt*, falls auch $C_\cdot$ beschränkt ist. Die Kategorien von beschränkten, nach oben beschränkten, nach unten beschränkten und nicht-negativen Kokettenkomplexen werden mit $\mathfrak{Ch}^\mathsf{b}$, $\mathfrak{Ch}^-$, $\mathfrak{Ch}^+$ und $\mathfrak{Ch}^{\geq 0}$ bezeichnet.

2 Die abelsche Kategorie $\mathfrak{Ch}$

2.1 Additive Kategorien

Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt eine *additive Kategorie*, falls gilt:

1. Jede Morphismenmenge $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(A,B)$ besitzt die Struktur einer abelschen Gruppe, derart, dass für
$$f : A \to B,\ g,g' : B \to C,\ h : C \to D$$
in $\mathcal{A}$ gilt: $h(g + g')f = hgf + hg'f$ in $\mathrm{Hom}_\mathcal{A}(A,D)$.
2. Für jedes Paar A, B von Objekten von $\mathcal{A}$ existiert ein Produkt $A \times B$.
3. $\mathcal{A}$ besitzt ein Nullobjekt.

Ein *additiver Funktor* $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwischen additiven Kategorien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$ ist ein Funktor, für den jedes $\mathrm{Hom}_\mathcal{B}(B',B) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{A}(FB',FB)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

2.2 Quotientenkomplexe

Ein Kettenkomplex B heißt *Unterkomplex* des Kettenkomplexes C, falls jedes B_n ein Untermodul von C_n und das Differential auf B die Restriktion des Differentials auf C ist. Die C_n/B_n bilden einen Kettenkomplex, der mit C/B bezeichnet und *Quotientenkomplex* genannt wird.

Ist $f : B \to C$ eine Kettenabbildung, so bilden die Kerne $\{Kern(f_n)\}$ einen Unterkomplex von B, der mit $Kern(f)$ bezeichnet wird, und die Kokerne $\{Kokern(f_n)\}$ einen Quotientenkomplex von C, der mit $Kokern(f)$ bezeichnet wird.

2.3 Kerne und Kokerne von Morphismen

In einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$ ist der *Kern* eines Morphismusses $f : B \to C$ definiert als eine Abbildung $i : A \to B$ die universell ist bezüglich der Eigenschaft $fi = 0$.

Der *Kokern* von f ist eine Abbildung $e : C \to D$, die universell ist bezüglich der Eigenschaft $ef = 0$.

Eine Abbildung $i : A \to B$ heißt *Monomorphismus*, falls für alle Abbildungen $g : A' \to A$ gilt:

$$ig = 0 \Rightarrow g = 0$$

und eine Abbildung $e : C \to D$ heißt *Epimorphismus*, falls für alle Abbildungen $h : D \to D'$ gilt:

$$he = 0 \Rightarrow h = 0.$$

2.4 Abelsche Kategorien

Eine *abelsche Kategorie* ist eine additive Kategorie $\mathcal{A}$, für die gilt:

1. Jede Abbildung in $\mathcal{A}$ hat einen Kern und einen Kokern.
2. Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist der Kern seines Kokerns.
3. Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist der Kokern seines Kerns.

Eine Unterkategorie $\mathcal{B}$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ heißt eine *abelsche Unterkategorie*, falls sie selbst abelsch ist und jede in $\mathcal{A}$ exakte Sequenz auch in $\mathcal{B}$ exakt ist.

Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige abelsche Kategorie, so lassen sich die vorangegangenen Definitionen von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen verallgemeinern, indem $\mathfrak{mod} - \mathfrak{R}$ durch $\mathcal{A}$ ersetzt wird. Man erhält eine abelsche Kategorie $\mathfrak{Ch}(\mathcal{A}) = \mathfrak{Ch}$.

Jede Sequenz $0 \to A_. \to B_. \to C_. \to 0$ von Kettenkomplexen ist genau dann exakt in $\mathfrak{Ch}$, wenn jede Sequenz $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ in $\mathcal{A}$ exakt ist.

2.5 Doppelkomplexe

Ein *Doppelkomplex* (oder *Bikomplex*) $C_{..}$ in $\mathcal{A}$ ist eine Familie $\{C_{p,q}\}$ von Objekten von $\mathcal{A}$ zusammen mit Abbildungen

$$d^h : C_{p,q} \to C_{p-1,q} \text{ und } d^v : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$$

so dass gilt: $d^h \circ d^h = d^v \circ d^v = d^v d^h + d^h d^v = 0$.
Ein Doppelkomplex C heißt *beschränkt*, falls C nur endlich viele Terme ungleich Null in jeder Diagonale $p + q = n$ hat.

Wegen der Antikommutativität bilden die Abbildungen d^v keinen Morphismus in $\mathfrak{Ch}$, es können aber Kettenabbildungen f_{*q} von $C_{*,q}$ nach $C_{*,q-1}$ folgendermaßen definiert werden:

$$f_{p,q} = (-1)^p d^v_{p,q} : C_{p,q} \to C_{p,q-1}.$$

Damit lässt sich die Kategorie der Doppelkomplexe mit der Kategorie $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{Ch})$ der Kettenkomplexe in der abelschen Kategorie $\mathfrak{Ch}$ identifizieren.

2.6 Totale Komplexe

Die *totalen Komplexe* $Tot(C) = Tot^{\Pi}(C)$ und $Tot^{\oplus}(C)$ sind definiert durch:

$$Tot^{\Pi}(C)_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q} \text{ und } Tot^{\oplus}(C)_n = \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}$$

Die Formel $d = d^h + d^v$ definiert Abbildungen

$$d : Tot^{\Pi}(C)_n \to Tot^{\Pi}(C)_{n-1} \text{ und } d : Tot^{\oplus}(C)_n \to Tot^{\oplus}(C)_{n-1}$$

mit $d \circ d = 0$, wodurch $Tot^{\Pi}(C)$ und $Tot^{\oplus}(C)$ zu Kettenkomplexen werden.

Bemerkung: Die totalen Komplexe existieren nicht in jeder abelschen Kategorie. Man sagt, eine abelsche Kategorie ist *komplett*, falls alle unendlichen direkten Produkte existieren, und sie ist *kokomplett*, falls alle unendlichen direkten Summen existieren.