# Kettenhomotopien, Abbildungskegel und -zylinder

Benjamin Peters

18.05.2012

Den kompletten Vortrag über und auch im Handout leben wir in der Welt der $R$-Moduln. Zudem ist jede Abbildung, die vorkommt, schon ein passender Morphismus.

## 1 Homotopieinvarianz

In diesem Abschnitt wollen wir wie in [Hat02, S.110-112] nachvollziehen, dass das Axiom der Homotopieinvarianz (vgl. dazu [Gru12]) von Eilenberg-Steenrod für unsere singuläre Homologie erfüllt ist.
Zuerst halten wir fest, dass wir für jede Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen eine Abbildung zwischen den dazugehörigen Kettenkomplexen

$$f_{\#} : C_n(X) \to C_n(Y)$$

durch eine lineare Fortsetzung der Abbildung $f_{\#} : \Delta^n \to Y$ mit $f_{\#}(\sigma) = f \circ \sigma$ erhalten. Da diese Abbildung $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ erfüllt, induziert sie einen Homomorphismus zwischen den Homologiegruppen

$$f_\star : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y).$$

Das folgende Theorem liefert uns nun die Homotopieinvarianz:

**Theorem** Wenn zwei Abbildung $f, g : X \to Y$ homotop sind, so induzieren sie den selben Homomorphismus $f_\star = g_\star : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y)$.

**Korollar** Die Abbildungen $f_\star : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y)$, die von einer Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ induziert werden, sind für alle $n$ Isomorphismen.

## 2 Kettenhomotopie

Nun wollen wir einsehen, wann Kettenabbildungen auf der dazugehörigen Homologie die Nullabbildung oder die selben Abbildungen induzieren. Noch mehr dazu sowie einige Aufgaben findet man in [Wei95, S. 15-17]. Beginnen wir mit einigen Definitionen:

**Definition**

- Wir sagen, ein Komplex $C$ *spaltet*, wenn es Abbildungen $s_n : C_n \to C_{n+1}$ gibt, so dass $d = dsd$. Ist $C$ zusätzlich azyklisch, so ist $C$ *exakt* und *spaltet*.
- Eine Kettenabbildung $f : C \to D$ heißt *null-homotop*, wenn es Abbildungen $s_n : C_n \to C_{n+1}$ gibt, derart dass $f = ds + sd$.
- Zwei Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ heißen *ketten-homotop*, wenn ihre Differenz $f - g$ null-homotop, also $f - g = ds + sd$, ist.

Die Bedeutung dieser Definition wird im folgenden Lemma klar, das die Wörter null- und ketten-homotop mit Leben füllt:

**Lemma** Wenn $f : C \to D$ null-homotop ist, dann ist jede Abbildung $f_\star : \mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$ null. Wenn $f, g : C \to D$ ketten-homotop sind, so induzieren sie die selbe Abbildung $f_\star = g_\star : \mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$.

# 3 Abbildungskegel

Hier wollen wir den sogenannten Abbildungskegel kennenlernen und genauer untersuchen, um dann festzustellen, dass es einen engen Zusammenhang zwischen Quasi-Isomorphie und gewissen Eigenschaften des Kegels gibt. Wir orientieren uns hierbei an [Wei95, S.18f].

**Definition** Sei $f : B \to C$ eine Abbildung von Kettenkomplexen, so definieren wir den *Abbildungskegel* $\mathrm{cone}(f)$ gradweise:

$$\mathrm{cone}(f)_n := B_{n-1} \oplus C_n$$

Das Differential sei passenderweise

$$d(b, c) := (-d(b), d(c) - f(b)) \text{ für } b \in B_{n-1},\ c \in C_n.$$

**Bemerkung** Um einen Zusammenhang zu Abschnitt 2 herzustellen, beobachten wir:

- Für $\mathrm{cone}(C) := \mathrm{cone}(\mathrm{id}_C)$ gilt: $\mathrm{cone}(C)$ ist exakt und spaltet mit der *Spaltungsabbildung* $s(b, c) = (-c, 0)$, d.h. $d = dsd$.
- $f : C \to D$ ist genau dann null-homotop, wenn es sich zu einer Abbildung $(-s, f) : \mathrm{cone}(C) \to D$ fortsetzen lässt.

Zudem können wir uns nun eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen basteln, in der $f_\star : \mathrm{H}_n(C) \to \mathrm{H}_n(D)$ genau der verbindende Morphismus $\partial$ ist: Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathrm{cone}(f) \xrightarrow{\delta} B[-1] \longrightarrow 0$$

erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{cone}(f)) \xrightarrow{\delta_\star} \mathrm{H}_n(B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_n(C) \longrightarrow \mathrm{H}_n(\mathrm{cone}(f)) \xrightarrow{\delta_\star} \mathrm{H}_{n-1}(B) \longrightarrow \ldots\ .$$

**Lemma** $\partial$ ist $f_\star$.

**Korollar** Eine Abbildung $f : B \to C$ ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn der Abbildungskegel $\mathrm{cone}(f)$ exakt ist.

## 4 Abbildungszylinder

Ganz analog zum Abbildungskegel wollen wir in diesem Abschnitt einen Abbildungszylinder konstruieren, der uns wieder einen Zusammenhang zur Kettenhomotopie von Abbildungen sowie viele lange exakte Sequenzen liefert. Aus Zeitgründen kann dies alles auch in [Wei95, S.20-24] nachgelesen werden.

**Definition** Sei $f : B \to C$ eine Abbildung von Kettenkomplexen, so definieren wir den *Abbildungszylinder* $\mathrm{cyl}(f)$ gradweise:

$$\mathrm{cyl}(f)_n := B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n$$

Das Differential sei passenderweise

$$d(b, b', c) := (d(b) + b', -d(b'), d(c) - f(b')) \text{ für } b \in B_n,\ b' \in B_{n-1},\ c \in C_n.$$

**Bemerkung** Auch hier lässt sich ein enger Zusammenhang zu Abschnitt 2 feststellen: Sei wiederum $\mathrm{cyl}(C) := \mathrm{cyl}(\mathrm{id}_C)$, so gilt: $f, g : C \to D$ sind genau dann ketten-homotop, wenn sie sich zu einer Abbildung $(f, s, g) : \mathrm{cyl}(C) \to D$ fortsetzen lassen.

**Lemma 1.5.6** Der Teilkomplex $\{(0, 0, c)\}$ ist isomorph zu $C$ und $\alpha : C \to \mathrm{cyl}(f)$ ist ein Quasi-Isomorphismus.

Wir erhalten durch einige Überlegungen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "-\partial"] & \mathrm{H}_n(B) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[dr, "f"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{cyl}(f)) \arrow[r, "-\partial"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_n(\mathrm{cone}(f)) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "="] & \mathrm{H}_{n-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(B[-1]) \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{H}_n(C) \arrow[r, "\delta"] & H_n(\mathrm{cone}(f)) \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{H}_n(B[-1]) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

und stellen fest, dass es gutartig ist:

**Lemma 1.5.7** Das Diagramm ist kommutativ mit exakten Reihen.

Weiterhin liefern uns Abbildungskegel und -zylinder eine Möglichkeit, eine Abbildung $f : C \to D$ in eine lange exakte Sequenz zu packen. Dies geschieht grob gesagt folgendermaßen:
Gegeben sei die kurze exakte Sequenz

$$0 \to B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \to 0.$$

Diese liefert uns ein kommutatives Diagramm mit exakten Reihen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, leftrightarrow, "="] & B[-1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "="] & \mathrm{cyl}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{cone}(f) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

$\beta$ und $\varphi$ sind dabei Quasi-Isomorphismen.
Als lange exakte Sequenz der Homologiegruppen erhalten wir wiederum obiges Diagramm und können sogar zeigen, dass $-\delta_\star = \partial$ ist.

**Bemerkung** Sei $f : C \to D$ wieder eine Abbildung von Kettenkomplexen.

- Ist $v : C \hookrightarrow \mathrm{cone}(f)$ die Inklusion, so gibt es eine Kettenhomotopieäquivalenz $\mathrm{cone}(f) \to B[-1]$.
- Die natürlichen Abbildungen $\mathrm{Kern}(f)[-1] \to \mathrm{cone}(f) \to \mathrm{Cokern}(f)$ induzieren eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{n-1}(\mathrm{Kern}(f)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{H}_n(\mathrm{cone}(f)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}_n(\mathrm{Cokern}(f)) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{n-2}(\mathrm{Kern}(f)) \to \dots.$$

# Literatur


[Gru12] Moritz Gruber. „Singuläre Homologie und Eigenschaften der singulären Homologie“. In: *Seminar: Ausgewähltes aus der homologischen Algebra.* 2012.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[Wei95] Charles A. Weibel. *An Introduction to homological algebra.* Cambridge University Press, 1995.