Diagrammjagden Teil 2 und die Homologiegruppen der Sphäre

Sei $(\mathcal{H}_*, \partial_*)$ eine Homologietheorie.

Bemerkung 1
Für jeden topologischen Raum X gilt $\mathcal{H}_n(X,X) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2 (Sequenz von Tripeln)
Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq B \subseteq X$. Weiter seien $i : (B,A) \hookrightarrow (X,A)$ und $j : (X,A) \hookrightarrow (X,B)$ die Inklusionen. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,B,A)} \mathcal{H}_n(B,A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i)} \mathcal{H}_n(X,A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(j)} \mathcal{H}_n(X,B) \xrightarrow{\partial_n(X,B,A)} \mathcal{H}_{n-1}(B,A) \longrightarrow \cdots$$

Satz 3 (Mayer-Vietoris-Sequenz)
Seien X ein topologischer Raum und $X_1, X_2 \subseteq X$ Unterräume so gewählt, dass für $X_0 := X_1 \cap X_2$ und $l : (X_1, X_0) \hookrightarrow (X, X_2)$ die Inklusion $\mathcal{H}_n(l) : \mathcal{H}_n(X_1, X_0) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(X, X_2)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Weiter sei $A \subseteq X_0$ ein Unterraum. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz der Form:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}(X;X_1,X_2)} \mathcal{H}_n(X_0,A) \xrightarrow{\mathcal{H}_n(i_1)\oplus\mathcal{H}_n(i_2)} \mathcal{H}_n(X_1,A) \oplus \mathcal{H}_n(X_2,A)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{H}_n(j_1)-\mathcal{H}_n(j_2)} \mathcal{H}_n(X,A) \xrightarrow{\partial_n(X;X_1,X_2)} \mathcal{H}_{n-1}(X_0,A) \longrightarrow \cdots$$

Dabei sind $i_b : (X_0, A) \hookrightarrow (X_b, A)$ und $j_b : (X_b, A) \hookrightarrow (X, A)$ für $b \in \{1,2\}$ die Inklusionen.

Bemerkung 4
Sind X_1 und X_2 offen und gilt $X = X_1 \cup X_2$, so sind die Voraussetzungen aus Satz 3 stets erfüllt.

Definition 5
Sei X ein topologischer Raum. Die *Einhängung* von X ist definiert als $\Sigma X := X \times [-1,1]/_\sim$. Dabei ist $\sim$ die von $(x,1) \sim (y,1)$ und $(x,-1) \sim (y,-1)$ für alle $x, y \in X$ erzeugte Äquivalenzrelation. Man identifiziert X mit $X \times \{0\}$.

Satz 6 (Einhängungsisomorphismus)
Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\sigma_n : \mathcal{H}_{n+1}(\Sigma X, \{p\}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_n(X, \{p\})$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 7
Sei X ein topologischer Raum und $p \in X$. Dann gilt

$$\mathcal{H}_n(X) \cong \mathcal{H}_n(\{p\}) \oplus \mathcal{H}_n(X, \{p\})$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Korollar 8
Die n-te Homologiegruppen der d-dimensionalen Sphäre ist $\mathcal{H}_n(S^d) \cong \mathcal{H}_n(\bullet) \oplus \mathcal{H}_{n-d}(\bullet)$.
Erfüllt $(\mathcal{H}_*, \partial_*)$ das Dimensionsaxiom, so gilt für $d \geq 1$

$$\mathcal{H}_n(S^d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & , n \in \{0, d\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Korollar 9
Für $d, e \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{R}^e$ sind homöomorph,

(b) S^{d-1} und S^{e-1} sind homotopieäquivalent,

(c) $d = e$.

Literatur:

* Wolfgang Lück. Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten. Vieweg Studium. Vieweg, 2005.

* Allen Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.