δ-Funktoren und universelle δ-Funktoren

Jonathan Zachhuber

28. Juni 2012

Wir möchten das gesehene Ableiten von Funktoren axiomatisieren und ein wichtiges Kriterium für die Eindeutigkeit des Vorgehens zeigen. Dabei orientieren wir uns vor allem[1] [Lan02, Kap. XX.7]. Anschließend erkunden wir noch einige Beispiele.

1 δ-Funktoren

Im Folgenden seien stets $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien.

Definition 1.1: F heißt *(kovarianter kohomologischer[2]) δ-Funktor* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls F aus einer Familie $\{F^n\}_{n\geq 0}$ von additiven kovarianten Funktoren und für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

in $\mathcal{A}$ aus einem $\delta^n\colon F^n(M'') \longrightarrow F^{n+1}(M')$, das $(*)$ natürlich zu einer langen exakten Sequenz macht, besteht. Genauer: F erfülle

(Δ1) Die lange Sequenz

$$0 \longrightarrow F^0(M') \longrightarrow F^0(M) \longrightarrow F^0(M'') \xrightarrow{\delta^1} F^1(M') \longrightarrow \cdots \tag{$**$}$$

sei exakt und

(Δ2) für je zwei kurze exakte Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N'' \arrow[r] & N \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[1] Die Theorie hat ihren Ursprung in Grothendiecks [Tohoku]. Das Wesentliche aus diesem Vortrag findet sich in §2.1 und 2.2.

[2] Für Homologieinteressierte lohnt sich eventuell ein Blick in [Wei95, §2.4].

und jedes δ^n kommutiere

$$\begin{tikzcd} F^n(M'') \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d] & F^{n+1}(M') \arrow[d] \\ F^n(N'') \arrow[r, "\delta^n"] & F^{n+1}(N') \end{tikzcd}$$

Man sollte sich F also als einen Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in $\mathcal{A}$ in die langen exakten Sequenzen in $\mathcal{B}$ vorstellen.

Bemerkung 1.2: (a) Wählt man die Indizes absteigend statt aufsteigend, so spricht man von *homologischen δ-Funktoren*, das duale Konzept ist das des *kontravarianten δ-Funktors*. Insbesondere drehen sich dann alle Pfeile in $(**)$ um.

(b) Der Funktor F^0 ist linksexakt.

Bemerkung 1.3: Die Funktoren $R^i\mathcal{F}$ für einen linksexakten Funktor $\mathcal{F}$ bilden einen δ-Funktor.

Definition 1.4: Wir nennen einen δ-Funktor F *universell*, falls sich für jeden δ-Funktor G jede natürliche Transformation $f_0 \colon F^0 \longrightarrow G^0$ auf genau eine Art zu natürlichen Transformationen $f_n \colon F^n \longrightarrow G^n$, die jeweils mit den δ^n verträglich sind, fortsetzen lässt.

Bemerkung 1.5: Seien F und G zwei universelle δ-Funktoren und sei $F^0 \cong G^0$. Dann gilt schon $F \cong G$.

Definition 1.6: Wir nennen einen additiven Funktor $\mathcal{F}$ *auslöschbar*, falls es zu jedem Objekt A von $\mathcal{A}$ einen Monomorphismus $u \colon A \hookrightarrow M$ gibt, so dass $\mathcal{F}(u) = 0$.

Kann M zusätzlich als injektiv oder projektiv gewählt werden, so nennen wir $\mathcal{F}$ *durch Injektive bzw. Projektive auslöschbar*.

Satz 1: *Sei F ein kovarianter δ-Funktor und seien F^n für $n > 0$ auslöschbar. Dann ist F universell.*

Beweis: [Lan02, Thm. XX.7.1, S. 801]. □

Korollar 1.7: $\mathcal{A}$ habe genügend Injektive. Dann gilt:

(a) Sei $\mathcal{F} \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ linksexakt. Dann ist $R^n\mathcal{F}$ ein universeller δ-Funktor und $R^0\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$.

(b) Sei G ein universeller δ-Funktor. Dann ist G^0 linksexakt und $G^n \cong R^n G^0$.

Bemerkung 1.8: Die gemachten Aussagen gelten analog für homologische bzw. kontravariante δ-Funktoren.

Beispiel 1.9: Die „herkömmliche" (Ko)homologie von Kettenkomplexen ist ein universeller δ-Funktor $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$, da wir für jedes $A \in \mathcal{A}$ eine Einbettung $A \hookrightarrow \mathrm{cone}(\mathrm{id}_A)$ haben und $\mathrm{cone}(\mathrm{id}_A)$ azyklisch ist.

2 Dimensionsverschiebung

PROPOSITION 2.1: Sei F ein δ-Funktor,

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_k \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

exakt, wobei $F^n(E_i) = 0$ für $n > 0$. Dann gilt $F^p(Q) \cong F^{p+k}(M)$.

In dieser Situation nennt man M manchmal die *k-te Syzygie zu Q*.

Beweis: [Lan02, Prop. XX.7.3, S. 805]. □

BEMERKUNG 2.2: Sei $E^\cdot$ eine F-azyklische Auflösung, das heißt es gebe azyklische E_i mit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots$$

ist exakt. Dann ist $H^i(F(E^\cdot)) \cong R^i F(A)$.

3 Beispiele

Eine wichtige Anwendung von δ-Funktoren ist die Garbenkohomologie. Details findet man zum Beispiel in [Har77, §III.2] oder [Tohoku, Kap. III].

DEFINITION 3.1: (a) Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{Off}(X)$ die Kategorie der offenen Mengen in X. Dann nennen wir einen kontravarianten Funktor $\mathcal{F}\colon \mathfrak{Off}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ eine *Prägarbe (von abelschen Gruppen) auf X*.

Das Bild von $U \hookrightarrow V$ unter $\mathcal{F}$ bezeichnen wir mit $\cdot|_U$ und nennen es *Restriktionsabbildung von V nach U*.

(b) Gilt zusätzlich, dass es für jede offene Überdeckung U_i von $U \subseteq X$ offen und jede Familie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ genau ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{U_i} = s_i$ gibt, so nennen wir $\mathcal{F}$ eine *Garbe*.

Die Kategorie dieser bezeichnen wir mit $\mathfrak{Ab}(X)$.

(c) Sei $p \in X$. Die Gruppe

$$\mathcal{F}_p := \operatorname*{colim}_{x \in U \text{ offen}} \mathcal{F}(U)$$

nennen wir *Halm von $\mathcal{F}$ in p*.

(d) Sind alle Restriktionsabbildungen surjektiv, so nennen wir $\mathcal{F}$ *welk*.

BEMERKUNG 3.2: (a) Der Funktor $\Gamma(X,-)\colon \mathfrak{Ab}(X) \longrightarrow \mathfrak{Ab}, \mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}(X)$ ist linksexakt.

(b) $\mathfrak{Ab}(X)$ besitzt genügend Injektive.

DEFINITION 3.3: Wir definieren $\mathrm{H}^i(X,-) := R^i\Gamma(X,-)$ und nennen $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{F})$ die *Kohomologiegruppen der Garbe $\mathcal{F}$*.

BEMERKUNG 3.4: (a) Injektive Garben sind welk.

(b) Welke Garben sind $\mathrm{H}^i(X,-)$-azyklisch.

PROPOSITION 3.5: Sei X ein noetherscher topologischer Raum, $(\mathcal{F}_a)$ ein direktes System von Garben, so gibt es für jedes i einen natürlichen Isomorphismus

$$\lim \mathrm{H}^i(X,\mathcal{F}_a) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i(X,\lim \mathcal{F}_a).$$

Satz 2 (Verschwindungssatz von Grothendieck): *Sei X ein noetherscher topologischer Raum von Dimension n, $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf X und $i > n$. Dann ist $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$.*

Beweis: [Har77, Thm III.2.7] □

BEISPIEL 3.6: Auch hier ist $\mathrm{H}^1(S^1,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Dabei ist $\mathbb{Z}$ die konstante Garbe.

Das zweite Beispiel besteht aus den uns schon bekannten $\mathfrak{Ext}$- und $\mathfrak{Tor}$-Funktoren:

ERINNERUNG 3.7: (a) Sei R ein kommutativer Ring mit 1, B ein R-Modul. Dann ist $-\otimes_R B$ rechtsexakt, die Linksableitungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{Tor}_i(-,B)$.

(b) Sei nun A ein R-Modul, dann ist $\mathrm{Hom}(A,-)$ linksexakt, die Rechtsableitungen bezeichnen wir mit $\mathfrak{Ext}^i(A,-)$.

BEISPIEL 3.8: Sei $r \in R$ kein Nullteiler. Dann ist $\mathfrak{Tor}_1(R/(r),B) = \{b \in B \mid rb = 0\}$ der zugehörige Torsionsmodul.

Satz 3: *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit genügend Projektiven und Injektiven, $\mathcal{F}\colon\mathcal{C} \longrightarrow \mathfrak{Ab}$ ein rechtsexakter Funktor. Dann ist*

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{Ext}^i(A,-),\mathcal{F}) \cong L_i\mathcal{F}$$

ein natürlicher Isomorphismus.

Beweis: Ein recht technischer Beweis, der leider keine δ-Funktoren benutzt, findet sich in [HS97, §IV.10]. □

Literatur

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. New York: Springer, 1977.

[HS97] P.J. Hilton und U. Stammbach. *A Course in Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997. ISBN: 9780387948232.

[Lan02] Serge Lang. *Algebra. Revised Third Edition*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 2002.

[Tohoku] Alexander Grothendieck. „Sur quelques points d'algèbre homologique, I". In: *Tohoku Mathematical Journal* 9.2 (1957), S. 119–221. ISSN: 0040-8735. DOI: 10.2748/tmj/1178244839. URL: http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.tmj/1178244839.

[Wei95] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995. ISBN: 9780521559874.