Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Betreuer:
Dr. Florian Nisbach

Seminar im Wintersemester 2014/2015

zur Geometrischen Gruppentheorie

Rechtwinklige Artin-Gruppen

1. **Topologische Grundbegriffe**
   Literatur: [Hat02]

   Wir wiederholen einige Grundbegriffe wie CW-Komplexe, simpliziale Komplexe, n-Zusammenhangseigenschaft und $K(G,1)$-Räume. Eventuell beweisen wir, dass es zu jeder Gruppe G einen $K(G,1)$-Raum gibt.

2. **Einführung in rechtwinklige Artin-Gruppen**
   Literatur: [Cha07, Abschnitt 1, 2.1] und [Coh08, 1.6, 2.2, 3.2, 3.3]

   In diesem Vortrag führen wir Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen ein und lernen erste Beispiele kennen. Insbesondere definieren wir als Spezialfälle die *Rechtwinkligen Artingruppen* (RAAGs) und die *Rechtwinkligen Coxetergruppen* (RACGs). Schließlich sehen wir, dass Coxeter-Gruppen linear sind.

3. **Kuben-Komplexe**
   Literatur: die informellen Vorlesungsnotizen [Sch13, Abschnitt 1 und 2] und [Wil11, 2.1, 2.5]

   Nun lernen wir Kubenkomplexe kennen und sehen, dass diese in natürlicher Weise metrische Räume sind. Wir führen allgemein CAT(1), CAT(0) und CAT(-1)-Räume ein und zeigen, dass CAT(0)-Räume kontrahierbar sind. Allgemeiner definieren wir nicht-positiv gekrümmte Kubenkomplexe und lernen schließlich Gromovs Link-Kriterium kennen, das angibt, wann Euklidische Komplexe nicht-positiv gekrümmt sind.

4. **Der Salvetti-Komplex**
   Literatur: [Cha07, Abschnitt 2.6], [Wil11, 3.4] und [CD95]

   Wir konstruieren zu jeder RAAG $A(\Gamma)$ den Salvetti-Komplex $X = R(\Gamma)$, einen Kuben-Komplex, dessen Fundamentalgruppe $A(\Gamma)$ ist. Aus einem kombinatorischen Kriterium, das sich aus dem Link-Kriterium von Gromov aus dem vorangegangenen Vortrag ableiten lässt, erhalten wir, dass die universelle Überlagerung des Salvetti-Komplexes ein $CAT(0)$-Kubenkomplex und damit insbesondere kontrahierbar ist. Man kann daraus zum Beispiel folgern, dass $A(\Gamma)$ torsionsfrei ist.

5. **Isomorphie-Problem**
   Literatur: [Dro87], [KMLNR80]

   Zwei rechtwinklige Artin-Gruppen $A(\Gamma_1)$ und $A(\Gamma_2)$ sind genau dann isomorph, wenn die zugrundeliegenden Graphen Γ_1 und Γ_2 isomorph sind.

6. **Algebraische Eigenschaften: Ping-Pong-Lemma und Zentralisatoren**
   Literatur: [Kob13, 2.4, 2.5], [Ser89, S.34-44]

   Formulierung eines Ping-Pong-Lemmas speziell für RAAGs, das ein Kriterium liefert, wann $A(\Gamma)$ treu auf einer Menge operiert. Als Anwendung erhalten wir Kriterien, wann Potenzen von Erzeugern der RAAG die ganze Gruppe erzeugen. Weiterhin wollen wir Zentralisatorgruppen von Elementen in $A(\Gamma)$ studieren.

7. **Rechtwinklige Artingruppen sind linear**
   Literatur: [Kob13, 4.3], [DJ00]

   In diesem Vortrag erhalten wir die zentrale Aussage, dass RAAGs linear sind. Daraus lassen sich viele schöne Eigenschaften ableiten. Für den Beweis folgen wir dem Ergebnis von Davis und Januszkiewicz, die zeigen, dass jede RAAG kommensurabel zu einer rechtwinkligen Coxeter-Gruppe ist. Genauer wird ein Komplex gebaut, auf dem beide Gruppen in guter Weise operieren.

8. **Flächengruppen als Untergruppen von rechtwinkligen Artin-Gruppen**
   Literatur: [Kob13, 4.2], [SDS89]

   In diesem Vortrag lernen wir die Konstruktion von Droms, Servatius und Servatius kennen. Hierzu betrachten wir das 2-Skelett $X(\Gamma)$ des Salvetti-Komplexes zu einer RAAG $A(\Gamma)$. Zunächst erhalten wir ein Kriterium, wann Unterkomplexe des Salvetti-Komplexes (bzw. allgemeiner dessen Überlagerungen) Einbettungen der Fundamentalgruppen induzieren. Ausgehend vom Salvetti-Komplex wird nun ein Komplex gebaut, der eine Fläche ist, und dessen Fundamentalgruppe sich in $A(\Gamma)$ einbettet.

9. **Rechtwinklige Artingruppen als Untergruppen von Abbildungsklassengruppen**
   Literatur: [Kob13, 5.1,5.2]

   In diesem Vortrag konstruieren wir Einbettungen von RAAGs in die Abbildungsklassengruppe $\mathrm{Mod}(S)$, wobei S eine kompakte Fläche von Geschlecht $g \geq 2$ ist. Hierzu lernen wir zunächst den Kurvenkomplex $\mathcal{C}(S)$ kennen, ein kombinatorisches Objekt, auf dem die Abbildungsklassengruppe operiert. Dann zeigen wir, dass eine Einbettung von Γ in den Kurvenkomplex $\mathcal{C}(S)$ eine Einbettung $A(\Gamma) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S)$ induziert.

10. **Raum der Enden von Rechtwinkligen Artin-Gruppen**
    Literatur: [Cha07, 2.7], [BM01, Abschnitte 2.1, 4: Proposition 4.1]

    Für Räume, die nur ein Ende haben, kann man als feinere Invariante den Zusammenhangsgrad definieren. In diesem Vortrag lernen wir, dass unter kombinatorischen Voraussetzungen an den Graphen Γ die zugehörige RAAG $A(\Gamma)$ m-zusammenhängend ist.

11. **Gut organisierte Kubenkomplexe und Rechtwinklige Artingruppen**
    Literatur: [Wis12, 4.1], alternativ ausführlicher in [HW08, Kapitel 3 und 4]

    In diesem Vortrag lernen wir so genannte „special cube complexes“ kennen. Wise und Hagelund, die sie ursprünglich so benannt hatten, sagen heute, dass sie eigentlich besser „organized cube complexes“ heißen sollten. Denn sie sind eigentlich gar nicht speziell und so organisiert, dass sie lokal isometrisch zu RAAGs sind. Diese Eigenschaft ist sogar charakterisierend, wie wir in diesem Vortrag lernen werden.

12. **Halbraum-Systeme und Kubenkomplexe**
    Literatur: [Wis12, Kap 6] und ergänzende Literatur

    CAT(0)-Kubenkomplexe werden durch Hyperebenen in zwei Halbräume zerlegt. Die Hyperebenen können als Wände aufgefasst werden. Die führt zu der allgemeineren Struktur so genannter Wandräume. Nach einer Konstruktion von Sageev kann man nun umgekehrt solchen abstrakten Wandräumen einen Kubenkomplex zuordnen, der CAT(0) ist. Diese Konstruktion ist Ausgangspunkt für viele geometrische Konstruktionen von Kubenkomplexen.

13. **Anwendungen**
    Literatur: wird bei Bedarf nachgeliefert

    In diesem Vortrag können geometrische und algebraische Anwendungen der Theorie der speziellen Kubenkomplexen gezeigt werden. Zum Beispiel: Gruppen mit genügend vielen Untergruppen von Kodimension 1 können kubuliert werden, das heißt sie operieren als Isometrien auf einem CAT(0)-Kubenkomplex. Es gilt der Separabilitätssatz für quasi-konvexe Untergruppen von kompakten speziellen CAT(0)-Kubenkomplexen. Eventuell: was besagt die virtuelle Haken-Vermutung und was hat das mit Kubenkomplexen zu tun?

Um auf einen schnellen Blick eine gute Übersicht über das Thema zu bekommen, sind die beiden Übersichtsartikel [Cha07] und [Kob13] gut geeignet.

Literatur

[BM01] Noel Brady and John Meier, *Connectivity at infinity for right angled Artin groups.*, Trans. Am. Math. Soc. **353** (2001), no. 1, 117–132.

[CD95] Ruth Charney and Michael W. Davis, *Finite $K(\pi, 1)$s for Artin groups.*, Quinn, Frank (ed.), Prospects in topology. Proceedings of a conference in honor of William Browder, Princeton, NJ, USA, March 1994. Princeton, NJ: Princeton University Press. Ann. Math. Stud. 138, 110-124 (1995)., 1995.

[Cha07] Ruth Charney, *An introduction to right-angled Artin groups.*, Geom. Dedicata **125** (2007), 141–158 (English).

[Coh08] Arjeh Cohen, *Coxeter groups*, MasterMath course, TU/e Eindhofen The Netherlands, 2008, http:www.win.tue.nl/ jpanhuis/coxeter/notes/notes.pdf.

[DJ00] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz, *Right-angled Artin groups are commensurable with right-angled Coxeter groups.*, J. Pure Appl. Algebra **153** (2000), no. 3, 229–235.

[Dro87] Carl Droms, *Isomorphisms of graph groups.*, Proc. Am. Math. Soc. **100** (1987), 407–408.

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology.*, Cambridge: Cambridge University Press. xii, 544 p. \$ 90.00 , 2002.

[HW08] Frédéric Haglund and Daniel T. Wise, *Special cube complexes.* (English).

[KMLNR80] Ki Hang Kim, L. Makar-Limanov, Joseph Neggers, and Fred W. Roush, *Graph algebras.*, J. Algebra **64** (1980), 46–51.

[Kob13] Thomas Koberda, *Right-angled artin groups and their subgroups*, Preprint (2013), http://users.math.yale.edu/users/koberda/raagcourse.pdf.

[Sch13] Petra Schwer, *Lecture notes on CAT(0) cube complexes*, Lecture notes, Münster (2013), `wwwmath.uni-muenster.de/u/hitzelb/CubeCplx-Lecturenotes.pdf`.

[SDS89] Herman Servatius, Carl Droms, and Brigitte Servatius, *Surface subgroups of graph groups.*, Proc. Am. Math. Soc. **106** (1989), no. 3, 573–578.

[Ser89] Herman Servatius, *Automorphisms of graph groups.*, J. Algebra **126** (1989), no. 1, 34–60.

[Wil11] Henry Wilton, *Non-positively curved cube complexes*, Vorlesungsnotizen Caltech (2011), `http://www.ucl.ac.uk/~ucahhjr/Notes/cubenotes.pdf`.

[Wis12] Daniel Wise, *From riches to raags: 3-manifolds, right-angled Artin groups, and cubical geometry*, journal CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 117. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington; AMS, 2012.