

## Seminar im Wintersemester 2020/21

### Elliptische Kurven

In der algebraischen Geometrie treten elliptische Kurven als nichtsinguläre projektive Kurven vom Geschlecht 1 auf. Jede von ihnen lässt sich als eine kubische „Weierstraß-“Gleichung in 2 Variablen konkret beschreiben. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  können sie durch die Angabe einer einzigen Zahl in  $k$  (der „ $j$ -Invariante“) bis auf Isomorphie klassifiziert werden.

Die herausragende Eigenschaft, die elliptische Kurven z. B. für die Zahlentheorie und für die Kryptographie so interessant macht, ist die natürliche Gruppenstruktur auf ihnen. Sie lässt sich elementar-geometrisch, mithilfe von Divisorenklassen, oder durch explizite Formeln in den Weierstraß-Koordinaten beschreiben. Von besonderem Interesse sind oft die Punkte endlicher Ordnung in dieser abelschen Gruppe.

Der historisch erste Zugang zu elliptischen Kurven kommt aus der Funktionentheorie: Ist  $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$  ein Gitter in  $\mathbb{C}$ , so ist die (zu einem Torus homöomorphe) Riemannsche Fläche  $\mathbb{C}/\Lambda$  eine elliptische Kurve, deren Funktionenkörper die bzgl.  $\Lambda$  doppelperiodischen meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  sind („elliptische Funktionen“).

Im Seminar werden wir die verschiedenen Zugänge zu elliptischen Kurven und einige ihrer interessanten Eigenschaften kennenlernen. Ein Teil der Vorträge baut auf der Vorlesung Algebraische Geometrie auf; hierfür werden wir uns an Abschnitt IV.4 im Buch von Hartshorne orientieren. Für die Vorträge über die Zugänge via Weierstraß-Gleichung und via komplexer Tori werden dagegen nur rudimentäre Kenntnisse in algebraischer Geometrie benötigt.

#### Literatur

*R. Hartshorne*: Algebraic Geometry. Springer Graduate Texts in Mathematics 52.

*J. Silverman*: The Arithmetic of Elliptic Curves. Springer Graduate Texts in Mathematics 106.

Die **Vorbesprechung** findet am **23.7. um 13:00 Uhr** statt.

Bei Interesse an einer Teilnahme mit Vortrag schreiben Sie mir bitte eine E-Mail, in der Sie mir auch mitteilen, ob Sie an einer Vorbesprechung vor Ort teilnehmen würden oder ein Online-Format vorziehen würden.