Seminarprogramm Wintersemester 2007/08

Liealgebren

Vorträge

Die Hauptquelle für fast alle Vorträge unseres Seminars wird [Hum] sein. Wenn nicht anders angegeben, werden Referenzierungen immer auf Textstellen in [Hum] verweisen.

1 Grundliegendes (§1 - §3.1) Der Begriff der Liealgebra wird definiert und wir lernen als wichtige Spezialfälle die linearen Liealgebren kennen (insbesondere die klassischen Liealgebren A_n, B_n, C_n, D_n). Es wird erläutert, wie man aus einer assoziativen Algebra eine Liealgebra gewinnt. Schließlich werden algebraische Strukturen im Umfeld der Liealgebren eingeführt: Ideale, das Zentrum, die abgeleitete Algebra, der Normalisator, der Zentralisator, Homomorphismen, Darstellungen, insbesondere die adjungierte Darstellung. Die Begriffe „auflösbar“ und „halbeinfach“ (auf den Struktursatz in Vortrag 3 hinweisen!) werden eingeführt. *Ein eher leichter Vortrag, in dem mehr definiert als bewiesen wird.*

2 Die Sätze von Engel, Lie und Cartan (§3.2 - §4) Es wird definiert, wann eine Element einer Liealgebra L ad-nilpotent ist, und wann eine Liealgebra nilpotent ist. Der Satz von Engel besagt, dass eine Liealgebra nilpotent ist, wenn alle ihre Elemente ad-nilpotent sind. Wir zeigen weiter den Satz von Lie, führen die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Elements $x \in \mathrm{End}(V)$ in ein halbeinfaches und ein nilpotentes Element ein, und zeigen schließlich das Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit. *Wer gerne nette Sätze beweist, ist in diesem Vortrag sicher gut aufgehoben. Natürlich ist das ganze deshalb auch ein gutes Stück anspruchsvoller ...*

3 Die Killingform und Weyls Zerlegungssatz (§5- §6) Wir führen die Killingform, eine symmetrische Bilinearform, auf Liealgebren ein und zeigen damit den Struktursatz über halbeinfache Liealgebren. Wir erweitern den Begriff der Jordan-Chevalley-Zerlegung auf beliebige Liealgebren und untersuchen Moduln über Liealgebren. Insbesondere zeigen wir das Schur'sche Lemma. Zuletzt lernen wir das Casimirelement einer Darstellung kennen und zeigen Weyls Zerlegungssatz für Moduln über halbeinfachen Liealgebren. *Wieder ein Vortrag mit netten Sätzen, der ganz ähnlich angelegt ist wie der vorige.*

4 Gewichte und Wurzeln (§7 - §8) Es werden Gewichte und Gewichtsräume für $\mathfrak{sl}_2(F)$ eingeführt, maximale Tori und Wurzeln (*eine Verallgemeinerung des Eigenwertbegriffs*). Wir sehen die Wurzelraumzerlegung für halbeinfache Liealgebren und untersuchen geometrische Eigenschaften von Wurzelsystemen. *In diesem wieder etwas schlankeren Vortrag werden wichtige Konzepte eingeführt. Die Schwierigkeit liegt eher im klaren Präsentieren diesen Konzepte als in komplizierten Beweisen.*

5 Geometrische Wurzelsysteme und die Weylgruppe (§9 - §10.3) Zunächst wird die Stoßrichtung des letzten Vortrags weiterverfolgt: Wir geben eine ordentliche Definition für die bereits vorher behandelten Wurzelsysteme an und treiben ein wenig euklidische Geometrie mit ihnen. Dazu gibt es Beispiele (mit Bildchen!). Wir führen die Weylgruppe ein, sagen was positive bzw. negative Wurzeln sind, zeigen, dass jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt und reden über Weylkammern. *Keine schweren Beweise, aber dafür wird viel vom bisherigen verlangt.*

6 Klassifikation der einfachen Wurzelsysteme (§10.4 - §11) Wir definieren irreduzible Wurzelsysteme, sagen, was lange und kurze Wurzeln sind, definieren Cartanmatrix, Coxetergraphen und Dynkindiagramme (*das sind Graphen*). Der Klassifikationssatz 11.4 beschreibt alle möglichen Dynkindiagramme zu einem gegebenen irreduziblen Wurzelsystem von Rang ℓ. *Die Hauptschwierigkeit in diesem Vortrag ist der umfangreiche Beweis des Klassifikationssatzes, der naturgemäß viele Fallunterscheidungen beinhaltet. Inwieweit alle diese Fälle gezeigt werden sollen soll mit den Betreuern abgesprochen werden.*

7 Die universelle einhüllende Algebra (§17) Wir führen die Tensoralgebra und die symmetrische Algebra eines Vektorraums ein (*Das ist in [Hum] sehr knapp. Mehr Informationen finden sich zum Beispiel in [Fis] oder in [Kna]. Mit den Betreuern absprechen!*) Wir definieren die universelle einhüllende Algebra einer Liealgebra und zeigen den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt, der die Basis dieser universellen Einhüllenden beschreibt. *Die Tensoralgebra sollte manchen bereits bekannt sein - kein sehr schwerer Stoff also. Diesen allerdings für diejenigen, die sich damit noch nicht auskennen, übersichtlich zu präsentieren ist sicherlich nicht ganz leicht, insbesondere, weil die Vorlage hier aus drei verschiedenen Quellen besteht.*

8 Der Satz von Serre (§18 - §19) In diesem Vortrag werden halbeinfache Liealgebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern von Charakteristik

0 vermittels Erzeugern und Relationen beschrieben. Der Höhepunkt ist der Satz von Serre, der impliziert, dass zu einem beliebigen Wurzelsystem eine halbeinfache Liealgebra existiert, die dieses Wurzelsystem hat. Im Anschluss lernen wir noch ein Kriterium für Halbeinfachheit kennen, mit dem wir zeigen können, dass die klassischen Liealgebren A_n, B_n, C_n, D_n alle halbeinfach sind. *Ein wichtiger Satz mit einem doch recht umfangreichen Beweis (eigentlich der ganze Paragraph 18). Inwieweit §19.3 in den Vortrag hinein muss, kann noch verhandelt werden.*

9 Irreduzible Darstellungen (§20 - §21) Wegen Weyls Zerlegungssatz genügt es, irreduzible Darstellungen zu untersuchen. Wir lernen den Begriff des Höchstgewichtsvektors kennen und zeigen, dass es zu jedem Gewicht im Dualraum des maximalen Torus genau einen zyklischen Standardmodul gibt. Wir führen dominante Gewichte ein und zeigen, dass es eine Bijektion zwischen den dominanten, ganzzahligen Gewichten und den Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen gibt. *Mit diesem Vortrag beginnt eine Folge von Vorträgen über Darstellungstheorie von Liealgebren. Die Ergebnisse der beiden vorherigen Vorträge werden nicht benötigt.*

10 Freudenthals Multiplizitätsformel (§22) Die Frage, die in diesem Vortrag geklärt werden soll, ist, wie oft eine irreduzible Darstellung in einer irreduziblen Höchstgewichtsdarstellung wie im vorigen Vortrag vorkommt. Auskunft über diese Multiplizitäten erteilt die Freudenthal'sche Formel. Um diese zu beweisen führen wir das universelle Casimirelement (verwandt mit dem aus Vortrag 3) und Spuren auf Gewichtsräumen ein. Um diese etwas unübersichtliche Formel etwas anschaulicher zu machen, werden zwei Beispiele vorgerechnet. Schließlich wird noch der Begriff des formalen Charakters eingeführt. *Sicher nicht besonders umfangreich, aber dieses eher technische Thema verdient es, gründlich präsentiert zu werden.*

11 Der Satz von Harish-Chandra (§23) Wir konstruieren bestimmte Charaktere, indem wir das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra auf den Höchstgewichtsmoduln aus Vortrag 9 operieren lassen. Der Satz von Harish-Chandra sagt nun, dass die Höchstgewichte dieser Moduln schon an den Charakteren erkannt werden können. *Der eigentliche Beweis ist nicht schwer, aber man muss sauber buchhalten. Außerdem geht noch ein Hauch Algebraische Geometrie ein, die man aber ad hoc einführen kann (Das ist der Appendix).*

12 Chevalleybasen (§25) Mit diesem Vortrag beginnt ein neues Kapitel, in dem wir Liealgebren und ihre irreduziblen Darstellungen „über $\mathbb{Z}$“ definieren wollen. Wir führen ein, was eine Chevalleybasis ist und konstruieren Chevalleygruppen vom adjungierten Typ. *Wir benötigen nur den Stoff der ersten acht Vorträge. Die Beweise bestehen zu großen Teilen aus expliziter Rechnung in Wurzelsystemen. Damit das trotzdem verständlich präsentiert werden kann, ist der Vortrag eher kurz gehalten.*

13 Der Satz von Kostant (§26) Im Gegensatz zum letzten Vortrag wollen wir nun Matrizengruppen konstruieren, die man beliebigen Darstellungen unserer Liealgebra zuordnen kann (und nicht nur der adjungierten Darstellung). Um dies zu tun, arbeiten wir in der universellen Einhüllenden. Der Satz von Kostant gibt uns nun in jeder beliebigen irreduziblen Darstellung unserer Liealgebra ein $\mathbb{Z}$-Gitter an, das invariant ist unter bestimmten Elementen aus dem Bild der Chevalleybasis. *Der Beweis des Satzes gliedert sich in eine Folge von technischen Lemmata. Mehr oder weniger zielt der gesamte Vortrag auf den Satz hin, so dass die Dramaturgie klar sein sollte ...*

14 Zulässige Gitter (§27) Wir führen die Überlegungen der letzten beiden Vorträge fort, indem wir Kostants Satz dazu benutzen, zu einer endlichdimensionalen irreduziblen Darstellung ein so genanntes zulässiges Gitter zu konstruieren. Durch Reduktion modulo einer Primzahl erhalten wir linearen Gruppen und Liealgebren und können so die Konstruktion der Chevalleygruppen aus Vortrag 12 verallgemeinern. *Auch überschaubar. Man muss aber doch einige Konzepte parat haben (Rechnen modulo p, Tensoralgebra und natürlich die Theorie der Wurzelräume).*

Literatur

[Fis] Gerd Fischer. *Lineare Algebra.* vieweg, 1975.

[Hum] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* GTM, Nr. **9**. Springer, 1972.

[Kna] Anthony W. Knapp. *Lie Groups beyond an Introduction.* Progress in Mathematics, Nr. **140**. Birkhäuser, 1996.