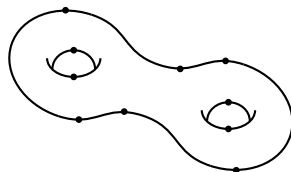


Seminar im WS 2006/2007

Morse-Theorie

Eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein geometrisches Objekt, das lokal wie ein offenes Stück vom \mathbb{R}^m aussieht. 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten nennen wir auch *Flächen*. Auf einer Mannigfaltigkeit M können wir – wie im \mathbb{R}^m auch – Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten und mit diesen Analysis betreiben.

Die Morse-Theorie untersucht das globale Aussehen von M mit Hilfe von Eigenschaften gewisser glatter Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (den *Morse-Funktionen*). Dazu betrachten wir vor allem die *kritischen Punkte* von f , das sind diejenigen Punkte von M , in denen die Ableitung von f verschwindet. Ein Beispiel einer Morse-Funktion ist die Höhenfunktion auf einer Fläche im \mathbb{R}^3 ; ihre kritischen Punkte sind lokale Minima und Maxima sowie Sattelpunkte.



Unser erstes Ziel wird sein, das *Morse-Lemma* zu beweisen. Es besagt, wie eine Mannigfaltigkeit in der Umgebung eines kritischen Punktes aussieht. Zum Beispiel sieht man damit, dass es auf Flächen nur die oben erwähnten lokalen Minima und Maxima und Sattelpunkte gibt. Auch auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit der Dimension m gibt es nur $m + 1$ Typen von nichtentarteten kritischen Punkten.

Auch aus algebraischer Sicht ist die Morse-Theorie sehr interessant: Es gibt zum Beispiel einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der kritischen Punkte von vorgegebenem Index k und dem Rang der k -ten Homologie-Gruppe (das ist die *Morse-Ungleichung*). Außerdem lässt sich die Poincaré-Dualität sehr einfach beweisen.

Als Krönung des Seminars wollen wir klassifizieren: Zuerst Flächen (vielleicht wissen ja einige schon, dass eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Fläche durch ihr Geschlecht eindeutig bestimmt ist), und dann, wenn noch Zeit bleibt, auch 3- und 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit der Hilfe von Heegaard-Diagrammen.

Als Grundlage für das Seminar wird das Buch *Yukio Matsumoto: An Introduction to Morse Theory* benutzt.

Voraussetzung für die Teilnahme am Seminar ist die Vorlesung Algebra 1.

Anmeldung: Es liegt eine Liste in Zimmer 308 (Sekretariat Frau Hoffmann) aus, in die sich Interessierte eintragen dürfen.

Eine **Vorbesprechung** findet am **Montag, 24. 7. 2006, 13.15 Uhr** im **S33** statt.