

Seminar im Sommer 2019: *p*-adische Analysis und der Satz von Dwork

Sei \mathbb{F}_q ein endlicher Körper und $\mathbb{F}_{q^s}/\mathbb{F}_q$ eine endliche Erweiterung. Dann ist eine **Hyperfläche** in $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_{q^s}}^n = \mathbb{F}_{q^s}^n$, definiert über dem endlichen Körper \mathbb{F}_q , eine Menge der Form

$$H_f(\mathbb{F}_{q^s}) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathbb{F}_{q^s}}^n \mid f(x) = 0\}$$

mit einem Polynom $f(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{F}_q[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Um diese Hyperflächen besser zu verstehen, betrachtet man ihre **Zeta-Funktionen**

$$Z(H_f/\mathbb{F}_q; X) := \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\#H_f(\mathbb{F}_{q^s})}{s} X^s\right).$$

Die Zetafunktion $Z(H_f/\mathbb{F}_q; X)$ kodieren das Lösungsverhalten von f in allen endlichen Erweiterungen \mathbb{F}_{q^s} von \mathbb{F}_q , sodaß das Studium dieser Zetafunktion Einsichten in dieses Verhalten verspricht.

Höhepunkt des Seminars wird der Beweis des **Satzes von Dwork** sein, welcher in unserer Fassung besagt, daß die Zeta-Funktion einer Hyperfläche H_f über einem endlichen Körper \mathbb{F}_q von der Form

$$Z(H_f/\mathbb{F}_q; X) = \frac{f(X)}{g(X)}$$

mit zwei Polynomen $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ ist. Dies impliziert, daß $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{C}$ existieren, sodaß

$$\#H_f(\mathbb{F}_{q^s}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i^s - \sum_{j=1}^l \beta_j^s$$

für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt.

Tatsächlich gilt der Satz von Dwork auch in allgemeineren Situationen und war der erste große Schritt auf dem Weg zum Beweis der sogenannten **Weil-Vermutungen**, welcher 1973 in Pierre Delignes Beweis der **Riemannschen Vermutung für algebraische Varietäten** kulminierte. Diese Ergebnisse liefern ein starkes Werkzeug, welches sich beim Lösen polynomieller Gleichungssysteme über endlichen Körpern als sehr nützlich erweist und wurde mit der Verleihung der **Fields-Medaille** an Deligne gewürdigt, nachdem Dwork für seine Arbeit zuvor der **Cole-Preis** erhalten hatte.

Der Beweis des Satzes von Dwork basiert auf *p*-adischer Analysis, d. h. dem Studium von Potenzreihen über *p*-adischen Zahlen, was den Titel unseres Seminars erklärt.

An **Vorkenntnissen** wird lediglich das Modul *Einführung in Algebra und Zahlentheorie* vorausgesetzt. Grundkenntnisse aus Algebra sind hilfreich, aber nicht notwendig für das Verständnis des Seminars, da die nötigen Grundlagen über endliche Körper und *p*-adische Zahlen im Seminar aufgearbeitet werden werden.

Dieses Seminar ergänzt die Module *Algebra*, *Zahlentheorie* und *Algebraische Geometrie*, sowie das ebenfalls stattfindende Seminar *Algebraische Kurven*, setzt diese jedoch nicht voraus.

Als **Literatur** dient das Buch “*p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*” von Neal Koblitz.

Anmeldung ab sofort im Sekretariat bei Frau Hoffmann, Raum 1.027.

Vorbesprechung findet am Mittwoch, den 06. Februar 2019, um 13:15 im *SR 2.66* statt.