Riemannsche Flächen und Algebraische Geometrie

Jonathan Zachhuber

14. Oktober 2011

Da algebraische Kurven über $\mathbb{C}$ „mindestens“ in $\mathbb{C}^2$ – einen reell vierdimensionalen Raum – eingebettet sind, sind sie geometrisch nicht sonderlich anschaulich. Daher wollen wir einsehen, dass wir jede glatte projektive algebraische Kurve über $\mathbb{C}$ auch als kompakte Riemannsche Fläche auffassen können. Um aber die algebraische Theorie verwenden zu können, ist es oft praktisch, die Riemannschen Flächen als algebraische Kurven zu sehen. Dass das so immer geht, wollen wir zumindest andeuten; „in Wirklichkeit“ handelt es sich dabei sogar um eine Äquivalenz von Kategorien[1].

Inhaltsverzeichnis

1 Riemannsche Flächen

Zunächst einmal sollten wir aber ein paar grundlegende Eigenschaften von Riemannschen Flächen und algebraischen Kurven wiederholen und uns dann überlegen, wie diese einander entsprechen könnten. Die Definitionen und Beispiele findet man größtenteils in [Mir95] und [For77] wieder, wenn auch da die Methoden manchmal etwas „analytischer“ sind.

[1] Einen Überblick dazu findet man zum Beispiel in [HS09, §2].

Definition 1.1: Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zusammenhängende zweidimensionale reelle Mannigfaltigkeit (also lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom), deren Kartenwechselabbildungen holomorph sind.

Beispiel 1.2: (a) Die *komplexe Ebene* ist eine Riemannsche Fläche.

(b) Sei $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathcal{S}^2$ die *Riemannsche Zahlenkugel*, versehen mit der Quotiententopologie (somit ist sie insbesondere hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom). Diese wird zu einer Riemannschen Fläche, indem wir die Überdeckung durch den $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ als Karten verwenden: Seien also

$$\mathfrak{U}_0 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathfrak{V}(X_0) = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0\} \text{ und}$$
$$\mathfrak{U}_1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathfrak{V}(X_1) = \{[x_0 : x_1] \mid x_1 \neq 0\}$$

und dementsprechend

$$\varphi_0 \colon \mathfrak{U}_0 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [x_0 : x_1] \longmapsto \tfrac{x_1}{x_0},$$
$$\varphi_1 \colon \mathfrak{U}_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [x_0 : x_1] \longmapsto \tfrac{x_0}{x_1}.$$

Diese Abbildungen sind offenbar wohldefiniert (da sich Skalare im Bruch kürzen) und bijektiv. Dass es Homöomorphismen (aufs Bild) sind, sieht man zum Beispiel daran, dass

$$(x_0, x_1) \longmapsto \tfrac{x_1}{x_0} \text{ bzw. } \tfrac{x_0}{x_1}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$ stetig und invariant unter $\mathbb{C}^\times$ ist, also über $\mathfrak{U}_i$ faktorisiert.

Als Umkehrabbildung wählen wir für φ_0

$$z \longmapsto [1 : z]$$

und sehen, dass das stetig ist, da wir sie als Verkettung von zwei stetigen Abbildungen schreiben können:

$$\begin{tikzcd}
 & (1,z) & \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \arrow[dr, "\pi"] & \\
z \arrow[ur, mapsto] & \in & \mathbb{C} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\
 & & \cup & \cup \\
 & & z \arrow[r, mapsto] & {[1 : z]}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist π nach Definition der Quotiententopologie stetig. Für φ_1 funktioniert das ganz analog.

Auf $\mathfrak{U}_0 \cap \mathfrak{U}_1 = \{[x_0 : x_1] \mid x_0 \neq 0 \neq x_1\} = \{[1 : \frac{x_1}{x_0}] \mid x_0 \neq 0 \neq x_1\}$ schreiben wir $z := \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{C}^\times$. Damit gilt dort $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} = [z \longmapsto \frac{1}{z}]$ und das ist holomorph.

(c) Sei $\Lambda := \omega\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann ist $T := \mathbb{C}/\Lambda$ ein *komplexer Torus*, den wir auch als Riemannsche Fläche auffassen können. Dazu sei $\pi\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ die kanonische Projektion. Diese ist nach Definition stetig und wir benutzen sie, um unsere Karten zu definieren: Sei also $p \in T$ und $U' \ni p$ eine offene Umgebung. Sei $x \in \pi^{-1}(\{p\}) \subseteq \mathbb{C}$ und V' eine offene Kugel um x, die keine zwei Gitterpunkte enthält (das geht und liefert eine Basis der Topologie, da Λ diskret in $\mathbb{C}$ liegt). Dann setzen wir $V := V' \cap \pi^{-1}(U')$ und $\varphi^{-1} := \pi|_V$, was stetig und bijektiv ist, und $U := \varphi^{-1}(V) \subseteq U'$, was auch eine offene Umgebung von p ist. Wir müssen also nur noch einsehen, dass auch φ stetig ist und die Kartenwechselabbildungen untersuchen. Dazu überlegen wir uns zuerst, dass π eine offene Abbildung ist.

Sei dazu $M \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann ist aber

$$\pi^{-1}(\pi(M)) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda + M)$$

und das ist als Vereinigung offener Mengen wieder eine offene Menge, $\pi(M)$ ist also – nach Definition der Quotiententopologie – auch eine offene Menge.

Seien nun also U_1 und U_2 zwei Umgebungen in T mit $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ und φ_i entsprechenden Kartenabbildungen. Dann gilt für $z \in \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)$:

$$\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z),$$

da *lokal* $\varphi_i^{-1} = \pi$ ist. Insbesondere heißt das aber, dass für jedes z aus dem Schnitt $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z)) - z$ in Λ liegt. Als Differenz von zwei stetigen Funktionen ist das aber wieder eine stetige Abbildung und da Λ diskret ist, ist sie lokal konstant. Damit sind unsere Kartenwechsel lokal Translationen[2] und damit insbesondere holomorph.

Nun wenden wir uns Abbildungen, die von Riemannschen Flächen ausgehen, zu.

Definition/Bemerkung 1.3: Seien X und Y Riemannsche Flächen.

(a) Sei $U \subseteq X$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann nennen wir f eine *holomorphe Funktion*, wenn für jede Karte φ die Abbildung $f \circ \varphi^{-1}$ auf dem entsprechenden Definitionsbereich holomorph ist.

Die Menge aller auf U holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(U)$.

(b) Wir definieren einen Morphismus von zwei Riemannschen Flächen als eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$, die holomorphe Funktionen erhält. Genauer: Für $V \subseteq Y$ und $\varphi \in \mathcal{O}(V)$ liegt $\varphi \circ f$ in $\mathcal{O}(f^{-1}(V))$. Manchmal nennt man einen Morphismus auch eine *holomorphe Abbildung*.

Die Riemannschen Flächen bilden zusammen mit den Morphismen eine Kategorie. Wir interessieren uns aber nur für kompakte Riemannsche Flächen und nennen diese Kategorie $\mathfrak{Riem}$.

Insbesondere kann man sich holomorphe Funktionen als Morphismen von X (bzw. U) in die komplexe Ebene vorstellen.

[2] Darauf wird zum Beispiel in [Kap07, III.1.3] näher eingegangen.

(c) Der Identitätssatz gilt auch für Riemannsche Flächen: Seien f_1 und f_2 zwei holomorphe Abbildungen von X nach Y, die auf einer Menge $A \subseteq X$, die einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen. Dann ist $f_1 = f_2$.

Das liegt letztendlich daran, dass man die Aussage über die Karten in die komplexe Ebene transportieren kann[3].

(d) Einen Morphismus $f\colon U \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, der nicht konstant ∞ ist, nennen wir *meromorphe Funktion auf* U (für $U \subseteq X$ offen).

Die Menge der meromorphen Funktionen auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(U)$.

Diese entsprechen auch genau der „konventionellen" Vorstellung von meromorphen Funktionen, da – nach dem Identitätssatz – $f^{-1}(\infty)$ keine Häufungspunkte besitzt und f sonst überall holomorph ist.

Insbesondere sind auch – für $f \neq 0$ – die Nullstellen von f isoliert. Damit ist $\mathcal{M}(X)$ ein Körper und heißt *Funktionenkörper*.

Ein weiterer interessanter Satz ist der folgende:

Bemerkung 1.4: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$.

Das liegt wieder daran, dass nichtkonstante holomorphe Abbildungen immer offen[4] sind. Damit wäre das Bild von X unter einer solchen eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{C}$, die offen, abgeschlossen und kompakt ist und das geht nicht[5].

Interessant ist diese Aussage – zusammen mit dem Identitätssatz – vor allem, weil in ihnen Konzepte versteckt sind, die wir von algebraischen Kurven her schon[6] kennen: Auch auf einer projektiven Varietät ist $\mathcal{O}(X) \cong k$ und auf jeder (irreduziblen) Varietät sind zwei Funktionen, die sich auf einer offenen Umgebung nicht unterscheiden, schon gleich!

An dieser Stelle erinnern wir uns noch kurz an die Definition einer Garbe:

Definition 1.5: Sei X ein topologischer Raum. Dann induziert X die Kategorie $\mathfrak{Off}_X$, deren Objekte die offenen Mengen von X sind und in der es zwischen zwei Objekten U und V genau dann (genau) einen Pfeil $U \longrightarrow V$ gibt, wenn $U \subseteq V$.

(a) Einen kontravarianten Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathfrak{Off}_X$ in die Kategorie $\mathfrak{Ab}$ der abelschen Gruppen nennen wir eine *Prägarbe von abelschen Gruppen auf* X. Statt $\mathfrak{Ab}$ nehmen wir auch gerne $\mathfrak{Ring}$, die Kategorie der Ringe mit 1.

Für $U \subseteq V$ bezeichnen wir das Bild des Morphismus $U \longrightarrow V$ unter $\mathcal{F}$ als *Restriktionsabbildung* und schreiben ρ_U^V. Das ist ein Morphismus von $\mathcal{F}(V)$ nach $\mathcal{F}(U)$ und statt $\rho_U^V(s)$ schreiben wir manchmal einfach $s|_U$ (wobei $s \in \mathcal{F}(V)$).

[3] Das wird zum Beispiel in [For77, Satz 1.11] ausgeführt.
[4] Das wird zum Beispiel in [For77, Corollar 2.4] gezeigt.
[5] Das kann man auch schön in [For77, §I.2] nachlesen.
[6] Naja. Aber wenn nicht, erinnern wir uns in Definition/Bemerkung 2.4 (e) daran, bzw. müssen nur ausnutzen, dass auf (irreduziblen) Varietäten alle offenen Mengen dicht sind.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und $p \in X$. Dann betrachten wir den Kolimes aller $\mathcal{F}(U)$ für offene Umgebungen U von p bezüglich der Restriktionsabbildungen:

$$\mathcal{F}_p := \operatorname*{colim}_{p \in U \in \mathfrak{Off}_X} \mathcal{F}(U).$$

Diesen nennen wir *Halm von $\mathcal{F}$ bei p* und schreiben dafür $\mathcal{F}_p$.

Als Elemente aus dem Halm können wir Vertreter (U, s) wählen, wobei U eine offene Umgebung von p und $s \in \mathcal{F}(U)$ ist und zwei solcher Vertreter (U, s) und (U', s') sich genau dann entsprechen, wenn es eine offene Umgebung $V \subseteq U \cap U'$ von p gibt, so dass $\rho_V^U(s) = \rho_V^{U'}(s')$. So einen Vertreter (U, s) nennen wir auch *Keim von s bei p* und schreiben s_p.

(c) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe, $U \in \mathfrak{Off}_X$ und U_i eine offene Überdeckung von U. Dann nennen wir eine Familie $\{s_i\}$ mit $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ eine *konsistente Familie*, wenn für alle i und j auf $U_i \cap U_j$ immer $s_i = s_j$ gilt.

Gibt es zu einer konsistenten Familie $\{s_i\}$ ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ für alle i, dann nennen wir dieses s ein *Amalgam* unserer konsistenten Familie.

(d) Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Dann nennen wir $\mathcal{F}$ eine *Garbe auf X*, wenn es zu jeder konsistenten Familie *genau ein* Amalgam gibt.

Bemerkung 1.6: Man kann sich Garben auch als *Garbifizierungen* von Prägarben vorstellen: Man nimmt sich einen topologischen Raum X und eine Prägarbe $\mathcal{F}$ und schaut sich den *étalen Raum zu $\mathcal{F}$* an, in dem man sich zu jedem Punkt $p \in X$ den Halm $\mathcal{F}_p$ betrachtet. Von diesem erhält man eine natürliche Projektion

$$\pi \colon |\mathcal{F}| := \coprod_{p \in X} \mathcal{F}_p \longrightarrow X, \quad \mathcal{F}_p \ni s \longmapsto p$$

und $|\mathcal{F}|$ kann man folgendermaßen mit einer Topologie versehen, so dass π stetig wird: Sei dazu U eine offene Umgebung von p in X und $f \in \mathcal{F}(U)$. Dann soll

$$\{f_q \mid q \in U\}$$

eine offene Umgebung von f_p sein und das liefert uns eine Umgebungsbasis in $|\mathcal{F}|$.

Nun kann man für jedes offene $U \subseteq X$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ die *stetigen Schnitte* zu π (also $p \longmapsto s_p$) betrachten. Dann erhalten wir eine Garbe $\mathcal{F}^+$ indem wir

$$\mathcal{F}^+(U) := \{s \colon U \longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p \mid s \circ \pi = \mathrm{id}_U,\ s \text{ ist stetig}\}$$

definieren.

Diese Garbe ist sogar universell, also liefert das Verfahren, wenn man mit einer Garbe anfängt, genau diese Garbe.

Bemerkung 1.7: $\mathcal{O}$ und $\mathcal{M}$ aus Definition/Bemerkung 1.3 sind Garben auf der entsprechenden Riemannschen Fläche.

2 Grundlagen Algebraische Geometrie

Nun wollen wir uns noch einmal an algebraische Kurven erinnern, damit wir danach hoffentlich Gemeinsamkeiten sehen können. Dazu brauchen wir aber zunächst ein bisschen Algebraische Geometrie. Für Beweise der Aussagen siehe zum Beispiel [WS10] oder [Har77].

Zunächst möchten wir uns aber an ein paar topologische Aussagen erinnern, um uns dann zu überlegen, wie die Zusammenhänge zwischen den algebraischen und den topologischen Objekten aussehen.

Definition/Bemerkung 2.1: Sei X ein topologischer Raum.

(a) Wir nennen X *irreduzibel*, wenn es keine Zerlegung in zwei echte abgeschlossene Teilmengen von X gibt.

(b) X heißt *noethersch*, wenn es für jede absteigende Kette

$$Y_1 \supsetneq Y_2 \supsetneq Y_3 \supsetneq \cdots$$

abgeschlossener Teilmengen von X ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $Y_n = Y_k$ für alle $k \geq n$.

(c) Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann können wir X in endlich viele irreduzible Teilmengen Y_i zerlegen; wenn wir fordern, dass diese sich nicht gegenseitig enthalten, ist die Zerlegung sogar eindeutig und wir nennen die Y_i *irreduzible Komponenten* von X.

(d) Das Supremum der Längen echt aufsteigender Ketten abgeschlossener irreduzibler Teilmengen von X nennen wir die *Dimension* von X oder $\dim X$.

Und nun kommen die algebraischen Grundlagen:

Definition/Bemerkung 2.2: Sei dazu k ein algebraisch abgeschlossener[7] Körper.

(a) Sei $\mathcal{F} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Familie von Polynomen und

$$\mathfrak{V}(\mathcal{F}) := \{x := (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid f(x) = 0 \;\forall f \in \mathcal{F}\} \subseteq k^n.$$

Eine solche Menge bezeichnen wir als *algebraische Menge*. Wenn $\mathfrak{V}(\mathcal{F})$ irreduzibel[8] ist, nennen wir es auch eine *affine Varietät*.

Es gilt $\mathfrak{V}(\mathcal{F}) = \mathfrak{V}(\langle\mathcal{F}\rangle) = \mathfrak{V}(\sqrt{\langle\mathcal{F}\rangle})$, also können wir $\mathcal{F}$ ohne Einschränkung als Ideal annehmen und I nennen. Insbesondere ist I endlich erzeugt, da der Polynomring noethersch ist. Außerdem gilt für $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, dass $\mathfrak{V}(\mathcal{F}_1) \supseteq \mathfrak{V}(\mathcal{F}_2)$ ist.

(b) Jetzt das gleiche rückwärts: Sei $V \subseteq k^n$. Dann nennen wir

$$\mathfrak{I}(V) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(x) = 0 \;\forall x \in V\} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$$

das *Verschwindungsideal* von V. Es ist sogar ein Radikalideal.

Auch hier gilt: $V_1 \subseteq V_2$ impliziert $\mathfrak{I}(V_1) \supseteq \mathfrak{I}(V_2)$.

[7] Das braucht man nicht immer, aber letztendlich werden wir sowieso vor allem Kurven über $\mathbb{C}$ betrachten.

[8] Hier orientieren wir uns an [Har77]. Für viele Aussagen muss man sowieso irreduzibel voraussetzen und nach Definition/Bemerkung 2.1 (c) können wir jeden (noetherschen) topologischen Raum in irreduzible Komponenten zerlegen, die Einschränkung ist daher meist nicht so stark.

(c) Um *projektive algebraische Mengen* und *projektive Varietäten* zu definieren, muss man beachten, dass das Auswerten von Polynomen im projektiven Raum nicht wohldefiniert ist. Für *homogene* Polynome ist aber die Nullstellenmenge wohldefiniert. Für eine homogene Teilmenge $\mathcal{F}$ des Polynomrings $k[X_0, \ldots, X_n]$ können wir also $\mathfrak{V}(\mathcal{F})$ ganz analog definieren und sogar, ohne Einschränkung, $\mathcal{F}$ als homogenes[9] Ideal wählen.

Genauso definieren wir für $V \subseteq \mathbb{P}^n$ das *(homogene) Verschwindungsideal*, welches wir von allen homogenen Polynomen f erzeugen lassen, die auf V verschwinden.

(d) Die affinen bzw. projektiven Varietäten bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf k^n bzw. $\mathbb{P}^n$. Diese nennen wir *Zariski-Topologie*. Insbesondere gilt für $V_1 := \mathfrak{V}(I_1)$ und $V_2 := \mathfrak{V}(I_2)$, dass $V_1 \cap V_2 = \mathfrak{V}(I_1 + I_2)$ und $V_1 \cup V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$ ist. Außerdem ist $\mathfrak{V}(\{0\}) = k^n$ und $\mathfrak{V}(k[X_1, \ldots, X_n]) = \varnothing$.

Die offenen Teilmengen einer Varietät bezeichnen wir als *quasi-affine* bzw. *quasi-projektive Varietäten*. Da Varietäten irreduzibel sind, liegen nichtleere offene Teilmengen immer dicht und haben immer nichtleeren Schnitt.

Den mit der Zariski-Topologie versehenen k^n nennen wir $\mathbb{A}^n(k)$.

(e) Wir betrachten die quasi-projektiven Varietäten $\mathfrak{U}_i := \mathbb{P}^n \setminus \mathfrak{V}(X_i)$. Diese überdecken den $\mathbb{P}^n$, da an jedem Punkt mindestens eine Koordinate nicht 0 ist. Durch die Abbildungen

$$\mathbb{A}^n \ni (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \longmapsto (x_0 : \cdots : x_i : 1 : x_{i+1} : \cdots : x_n) \in \mathfrak{U}_i \text{ und}$$
$$\mathfrak{U}_i \ni (x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto \left(\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_{i-1}}{x_i}, \tfrac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{A}^n$$

ist jedes $\mathfrak{U}_i$ homöomorph zum $\mathbb{A}^n$, da für eine abgeschlossene Teilmenge $V = \mathfrak{V}(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ das Bild des Schnittes mit $\mathfrak{U}_i$ im $\mathbb{A}^n$ gerade die Verschwindungsmenge des Ideals ist, was von der *Dehomogenisierung* (in X_i) der Erzeuger von I erzeugt wird. Genauso können wir jede Teilmenge $V' = \mathfrak{V}(I') \subseteq \mathbb{A}^n$ in den $\mathbb{P}^n$ abbilden und erhalten als Bild gerade den Schnitt von $\mathfrak{U}_i$ mit der Nullstellenmenge des Ideals, das von der *Homogenisierung* (in X_i) der Erzeuger von I' erzeugt wird.

Insbesondere können wir so auch jede (quasi-)projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $V \cap \mathfrak{U}_i$ überdecken, die jeweils homöomorph zu (quasi-)affinen Varietäten sind und jede (quasi-)affine Varietät so als (quasi-)projektive auffassen.

(f) Sei V eine affine (oder projektive) algebraische Menge. Dann nennen wir

$$k[V] := k[(X_0,)X_1, \ldots, X_n] \Big/ \mathfrak{I}(V)$$

den zu V gehörenden *Koordinatenring*.

(g) Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal. Dann nennen wir das Supremum der Längen von Primidealketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{r-1} \subsetneq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$$

[9] Insbesondere wird dieses dann von endlich vielen homogenen Elementen erzeugt.

die *Höhe* von $\mathfrak{p}$ und schreiben $\operatorname{ht}\mathfrak{p}$. Das Supremum aller Höhen aller Primideale in R nennen wir *Krulldimension* (oder nur *Dimension*) von R und schreiben $\dim R$.

Es gilt zum Beispiel $\dim k[X_1, \dots, X_n] = n$ und $\operatorname{ht}\mathfrak{m} = \dim R_\mathfrak{m}$.

Nun wollen wir die Algebra und die Topologie noch näher zusammen bringen:
Definition/Bemerkung 2.3: Sei $V := \mathfrak{V}(I)$ eine affine oder projektive algebraische Menge.

(a) V ist genau dann irreduzibel, wenn I ein Primideal ist. Das ist genau dann der Fall, wenn $k[V]$ nullteilerfrei ist.

Dass die algebraische und topologische Zerlegung sich hier entsprechen, sieht man letztendlich an $V_1 \cup V_2 = \mathfrak{V}(I_1 \cdot I_2)$.

Zum Beispiel ist der $\mathbb{A}^n$ irreduzibel, da $k[\mathbb{A}^n] = k[X_1, \dots, X_n]$ nullteilerfrei ist. Genauso geht das für den $\mathbb{P}^n$.

(b) Die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^n$ entsprechen bijektiv den Radikalidealen im Polynomring durch die Zuordnungen $V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$ und $I \longmapsto \mathfrak{V}(I)$.

Die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ entsprechen bijektiv der Menge der homogenen Radikalideale im homogenen Polynomring ohne das Ideal, das aus allen Elementen mit echt positivem Grad besteht[10].

Die Injektivität der Zuordnung $V \longmapsto \mathfrak{I}(V)$ sieht man leicht, da $\mathfrak{V}(\mathfrak{I}(V)) = \overline{V} = V$ für Varietäten ist. Für die andere Richtung – das $\mathfrak{I}(\mathfrak{V}(I)) = \sqrt{I}$ ist – benötigt man den hilbertschen Nullstellensatz [WS10, Abschnitt I.3] (bzw. die projektive Version, [WS10, Proposition II.2.6]). Vor allem braucht man dafür auch, dass k algebraisch abgeschlossen ist.

(c) Insbesondere (da sich bei den Zuordnungen die Inklusionen umkehren) entsprechen die Punkte von V bijektiv[11] den maximalen Idealen in $k[V]$. Diese Menge nennen wir auch $\operatorname{spec}_{\max} k[V]$.

(d) So sieht man auch, dass die topologische Dimension einer affinen Varietät V gerade der Dimension von $k[V]$ als Ring entspricht, da eine absteigende Kette von irreduziblen Unterräumen in eine aufsteigende Kette von Primidealen übersetzt werden kann.

Bei einer projektiven Varietät $V' \subseteq \mathbb{P}^n$ entspricht die topologische Dimension gerade $\dim k[V'] - 1$, was letztlich an der „zusätzlichen" Variable des Polynomrings liegt.

Nachdem wir uns bei Riemannschen Flächen lokale Homöomorphismen nach $\mathbb{C}$ angeschaut haben und das Erhalten solcher als Bedingung für Morphismen erklärt haben, wollen wir ein ähnliches Konzept für Morphismen von Varietäten nutzen.

[10] Der Grund hierfür ist, dass $\mathfrak{V}(I) = \varnothing$ im projektiven bedeutet, dass $I = k[X_0, \dots, X_n]$ *oder* $\sqrt{I} = (X_0, \dots, X_n)$. Daher muss dieser Fall ausgeschlossen werden.

[11] Hier braucht man wieder wirklich, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Zum Beispiel ist für $k = \mathbb{R}$ die Varietät $\mathfrak{V}(X^2 + 1) = \varnothing$, aber $k[V] = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ besitzt ein maximales Ideal.

Definition/Bemerkung 2.4: (a) Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine quasi-projektive Varietät, $p \in Y$ und $f\colon Y \longrightarrow k$. Dann nennen wir f *regulär an der Stelle* p, wenn es eine offene Umgebung U von p und homogene Polynome *gleichen Grades* $g, h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ gibt, so dass $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ und $f = g/h$ auf U. Wenn f an jedem Punkt $p \in Y$ regulär ist, nennen wir f *regulär auf* Y.

Hier liefern weder g noch h wohldefinierte Funktionen auf $\mathbb{P}^n$, aber der Quotient g/h ist (auf U) wohldefiniert, da die Polynome gleichen Grades sind.

(b) Genau das gleiche machen wir im Affinen; hier können wir natürlich auf die Bedingungen „homogen“ und „von gleichem Grad“ verzichten.

(c) Die regulären Funktionen sind stetig, wenn wir k mit der Zariski-Topologie versehen.

Dazu genügt es zu überprüfen, dass die Urbilder abgeschlossener (also endlicher!) Mengen in k auch in Y abgeschlossen sind. Das Urbild eines Punktes $x \in k$ kann man aber lokal als Nullstellenmenge von $g - xh$ auffassen, also ist das Urbild als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

(d) Die regulären Funktionen auf V bilden mit komponentenweiser Addition und Multiplikation eine k-Algebra und sogar eine Garbe von Ringen, die wir mit $\mathcal{O}_V$ bezeichnen. Dabei sind die Halme gerade die regulären Funktionen, die an einem festen Punkt p definiert sind. Das entspricht gerade dem Koordinatenring lokalisiert[12] beim Verschwindungsideal von p und ist ein lokaler Ring.

(e) Für eine irreduzible affine Varietät V ist $\mathcal{O}(V) \cong k[V]$, da wir $k[V]$ in $\mathcal{O}(V)$ einbetten können (jedes Polynom definiert eine reguläre Funktionen und $\mathfrak{I}(V)$ liegt im Kern der Zuordnung); $\mathcal{O}(V)$ liegt aber sicherlich im Schnitt aller $\mathcal{O}_p$, welche aber den Lokalisierungen bei allen[13] maximalen Idealen entsprechen, was in nullteilerfreien[14] Ringen gerade der Ring selbst ist.

Für eine (irreduzible) projektive Varietät V ist $\mathcal{O}(V) \cong k$. Das einzusehen ist ziemlich technisch, Beweise findet man aber zum Beispiel in [Har77, I.3.4] oder [WS10, Satz 5].

(f) Sei V eine irreduzible Varietät. Wenn wir uns alle lokal definierten regulären Funktionen anschauen, also Vertreter (U, f), ohne einen festen Punkt p vorzuschreiben, so erhalten wir den *Funktionenkörper* $k(V)$ von V; seine Elemente nennen wir *rationale Funktionen.*

$k(V)$ ist tatsächlich ein Körper: Da sich zwei offene Mengen immer[15] schneiden, haben je zwei Elemente einen gemeinsamen Definitionsbereich und wir können sie dort addieren und multiplizieren; wir können auch jedes (U, f) auf $U \setminus \mathfrak{V}(f)$

[12] Im projektiven Fall müssen wir homogen lokalisieren. Insbesondere sollten dann „Zähler“ und „Nenner“ den gleichen Grad haben.

[13] Das liegt daran, dass hier die Punkte aus V bijektiv $\operatorname{spec}_{\max} k[V]$ entsprechen.

[14] Hierfür brauchen wir, dass V irreduzibel ist!

[15] Hier brauchen wir, dass V irreduzibel ist!

einschränken, wo es invertierbar ist, und auch ohne Einschränkung diese Menge gleich als Vertreter wählen.

Im Fall, dass V eine affine Varietät ist, gilt $k(V) \cong \operatorname{Quot} k[V]$, denn $\operatorname{Quot} k[V] \cong \operatorname{Quot} \mathcal{O}_p$ für alle p und ganz $k(V)$ wird von den $\mathcal{O}_p$ überdeckt.

Den projektiven Fall überlegt man sich, indem man die Varietät affin überdeckt und nachrechnet, dass beim „Rücktransport“[16] des Funktionenkörpers gerade der Quotientenkörper des homogenen Koordinatenrings rauskommt.

Nun können wir Morphismen und damit die Kategorie der Varietäten definieren:

Definition/Bemerkung 2.5: (a) Eine *Varietät* über k ist eine affine, quasi-affine, projektive oder quasi-projektive Varietät über k. Ein *Morphismus* zwischen zwei Varietäten X und Y ist eine stetige Abbildung φ, die reguläre Funktionen erhält, genauer: Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ und jede reguläre Funktion $f\colon U \longrightarrow k$ ist $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(V) \longrightarrow k$ eine reguläre Funktion.

Die Morphismen von X nach $Y = \mathbb{A}^1$ sind also gerade die regulären Funktionen.

Die Varietäten über k bilden zusammen mit ihren Morphismen die Kategorie $\mathfrak{Var}_k$.

(b) Jeder Morphismus $f\colon X \longrightarrow Y$ induziert einen Morphismus

$$\mathcal{O}(f) = f^\sharp\colon \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \text{ durch } \varphi \longmapsto f \circ \varphi.$$

(c) Einen Morphismus zwischen *affinen* Varietäten kann man sich als Tupel von Polynomen vorstellen, denn $\mathcal{O}(V) \cong k[V]$ und ein Element daraus verkettet mit Polynomen bleibt darin enthalten. Andererseits wird $k[V]$ von den „Koordinatenabbildungen“ X_i erzeugt, also ist f in jeder „Komponente“ in $k[V]$ also ein Polynom.

Jetzt können wir also sagen, wann zwei Varietäten isomorph sind. Wir sehen außerdem:

Satz 1: *Der Funktor $\mathcal{O}$, der einer affinen Varietät X ihren Ring der regulären Funktionen und einem Morphismus f den k-Algebrenhomomorphismus $f^\sharp$ zuordnet, ist volltreu. Das induziert eine Antiäquivalenz der Kategorien $\mathfrak{AffVar}_k$ und $\mathfrak{IntAlg}_k$, der endlich erzeugten nullteilerfreien[17] k-Algebren.*

Um zu sehen, dass wir wirklich alle Algebrenmorphismen so erhalten, nutzt man wieder die Darstellung des Morphismus als Tupel von Polynomen und Verkettung mit den „Koordinatenabbildungen“, die die Algebren erzeugen.

Dass wir alle k-Algebren erwischen, liegt daran, dass jede endlich erzeugte k-Algebra als Quotient eines Polynomrings aufgefasst werden kann: Wir haben also ein Verschwindungsideal einer Varietät in einem $\mathbb{A}^n$.

[16] Das liegt daran, dass die Zuordnung aus Definition/Bemerkung 2.2 (e) gerade dem Homogenisieren und Dehomogenisieren der zugehörigen Idealerzeuger entspricht.

[17] Hier muss man sich wieder überlegen, ob man Varietäten als irreduzibel voraussetzen möchte oder nicht. Im irreduziblen Fall erhält man nullteilerfreie Algebren, siehe dazu auch [Har77, Corollary I.3.8], im allgemeineren Fall alle reduzierten, siehe dazu [WS10, Satz 3].

Das ist ja schonmal ein ganz nettes Ergebnis, aber $k[V]$ ist in vielen Fällen noch keine gute Invariante und das Ergebnis lässt sich nicht leicht auf allgemeine Varietäten übertragen. Es wäre schöner, den Funktionenkörper mit einzubeziehen, dafür müssen wir aber unsere Morphismenmenge etwas erweitern.

Definition/Bemerkung 2.6: (a) Seien X und Y zwei (irreduzible[18]) Varietäten und U eine offene nichtleere Teilmenge von X. Wir betrachten Äquivalenzklassen (f_U, U) von Morphismen von U nach Y, wobei (f_U, U) und (f_V, V) äquivalent sind, wenn f_U und f_V auf $U \cap V$ übereinstimmen. Diese nennen wir *rationale Abbildung* und schreiben $f\colon X \dashrightarrow Y$.

Das ist wirklich eine Äquivalenzrelation, da zwei Morphismen, die auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen, gleich sind.

Für $Y = \mathbb{A}^1$ erhalten wir so gerade die rationalen Funktionen.

(b) Eine rationale Abbildung f heißt *dominant*, wenn $f(U)$ dicht in Y liegt.

(c) Sei f eine dominante rationale Funktion, dann induziert $f^\sharp$ einen Körperhomomorphismus $k(Y) \longrightarrow k(X)$, denn genau dann ist $f^\sharp$ injektiv.

Die Komposition dominanter rationaler Abbildungen ist wieder eine. Insbesondere definiert uns das also die Kategorie $\mathfrak{RatVar}_k$ der Varietäten über k mit dominanten rationalen Abbildungen.

Isomorphismen in dieser Kategorie nennen wir *birationale Abbildungen.*

Satz 2: *Das liefert eine Antiäquivalenz zwischen der Kategorie $\mathfrak{RatVar}_k$ und $\mathfrak{EndlErw}_k$, der Kategorie endlich erzeugter Körpererweiterungen von k mit k-Algebrenhomomorphismen.*

Um das „richtig“ zu beweisen, muss man sich erst eine „angenehme“ Basis für die Topologie basteln; das ist etwas technisch. Dann kann man sich mit Hilfe dieser aus den Bildern der Erzeuger von $k(Y)$ auch Erzeuger von $k(X)$ basteln kann. Dass man alle Körpererweiterungen erhält, sieht man genau wie in Satz 1.

3 Spezialfall Kurven

Nun wollen wir uns auf eine spezielle Art Varietäten einschränken: Kurven.

Definition 3.1: Eine *Kurve* ist eine quasi-projektive Varietät von Dimension 1. Sei ab jetzt $\mathcal{C}$ immer eine Kurve.

Bemerkung 3.2: Jede (irreduzible) Varietät X von Dimension d ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche im $\mathbb{P}^{d+1}$.

Insbesondere finden wir also für jede Kurve $\mathcal{C}$ ein (homogenes) $f \in k[X, Y, Z]$ mit $\mathcal{C} \sim \mathfrak{V}(f)$, das wir irreduzibel wählen. Wir nennen dann $\deg f$ den *Grad der Kurve.*

Um das einzusehen, muss man zu den Funktionenkörpern übergehen und sich an die Noether-Normalisierung aus Algebra II erinnern. Die besagt, dass eine endlich erzeugte k-Algebra immer ganz über einem Polynomring ist. Insbesondere ist das dann eine

[18] Spätestens hier will man das wirklich für alle Varietäten haben!

endliche algebraische Erweiterung der Funktionenkörper und der Satz vom primitiven Element[19] liefert uns eins. Aus dem Minimalpolynom lässt sich dann der Erzeuger unserer Hyperebene basteln und – wieder mit etwas Algebra II – sieht man noch ein, dass die Dimension einer Varietät gerade dem Transzendenzgrad ihres Funktionenkörpers entspricht.

Damit wir unter den Kurven über $\mathbb{C}$ aber unsere Riemannschen Flächen wiederfinden, müssen wir uns erst überlegen, was geometrische Singularitäten sein könnten und die dann ausschließen, da es diese bei Mannigfaltigkeiten ja nicht geben darf. Dort bedeutete das, dass die Umgebungen unserer Punkte immer „schön" aussehen sollten, hier definieren wir das genauso: Wir haben jetzt ja gesehen, dass die regulären Funktionen unseren Raum ganz gut lokal beschreiben und in Definition/Bemerkung 2.4 (d) uns überlegt, dass wir „lokal" jeden Punkt durch den lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathcal{C},p} \cong k[\mathcal{C}]_{\mathfrak{m}_p}$ beschreiben können.

Definition/Bemerkung 3.3: (a) Ein noetherscher lokaler Ring R mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $k = R/\mathfrak{m}$ heißt *regulär*, wenn $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim R$.

(b) Sei X eine Varietät und $p \in X$, also ist $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p \cong k$, da wir die Funktionskeime bei p auswerten können. Dann nennen wir X *regulär* bzw. *nichtsingulär in* p, wenn $\mathcal{O}_p$ regulär ist. $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ nennen wir den *(Ko-)Tangentialraum an* X *in* p.

Interessanterweise stimmt diese Definition des Tangentialraums im affinen Fall mit der „differentialgeometrischen" überein: $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ ist als k-Vektorraum dual zu dem Raum, der von der Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)$ aufgespannt wird (wobei die f_i die Erzeuger von $\mathfrak{I}(X)$ sind). Siehe zum Beispiel [Har77, Theorem I.5.1] oder [WS10, Kap. 3, Abschnitt 3]. Dieser ist aber von der Einbettung in den $\mathbb{P}^n$ abhängig!

(c) Im Fall einer Kurve $\mathcal{C}$ ist $\dim \mathcal{O}_p = 1$. Wenn $\mathcal{C}$ also in p regulär ist, verrät uns die Algebra II, dass $\mathcal{O}_p$ ein diskreter Bewertungsring ist, insbesondere ist $\mathfrak{m}_p$ ein Hauptideal, den Erzeuger nennen wir eine *Uniformisierende* und schreiben t_p.

Insbesondere können wir jedes $f \in K(\mathcal{C})$ bezüglich t_p bewerten. Das Ergebnis bezeichnen wir mit $\mathrm{ord}_p(f)$.

Die projektiven regulären Kurven sind nun die, die den Riemannschen Flächen entsprechen werden. Um das einzusehen, wollen wir die Aussage von Satz 2 etwas spezialisieren: Wir interessieren uns für Körpererweiterungen von k vom Transzendenzgrad 1.

Definition/Bemerkung 3.4: Sei K/k eine Körpererweiterung vom Transzendenzgrad 1.

Wenn K Funktionenkörper einer Kurve und p ein Punkt auf dieser ist, ist $\mathcal{O}_p \subseteq K$ ein lokaler Ring mit $\mathrm{Quot}\,\mathcal{O}_p \cong K$. Umgekehrt betrachten wir nun zu einem Erweiterungskörper[20] K die Menge C_K aller diskreten Bewertungsringe $k \subseteq R \subseteq K$ mit $\mathrm{Quot}\,R \cong K$ und $R/\mathfrak{m} \cong k$. Die Elemente von C_K nennen wir auch *Punkte* und schreiben $P \in C_K$, wobei wir mit P den diskreten Bewertungsring R_P meinen.

[19] Wenn die Charakteristik von k hier nicht 0 ist, muss man ein bisschen aufpassen.

[20] Diesen können wir nach Satz 2 natürlich immer als Funktionenkörper einer Kurve auffassen.

Da K Funktionenkörper einer Kurve ist, gibt es unendlich viele Ringe $\mathcal{O}_P$ in C_K. Zwei verschiedene Punkte P und Q liefern auch zwei Ringe, die sich nicht gegenseitig enthalten[21], also ist die Menge C_K nicht endlich. Wir machen sie also zu einem topologischen Raum, indem wir sie mit der koendlichen Topologie versehen.

Die Strukturgarbe definieren wir folgendermaßen: Für offenes $U \subseteq C_K$ sei

$$\mathcal{O}(U) := \bigcap_{P \in U} R_P$$

und für $f \in \mathcal{O}(U)$ sei $f(P)$ definiert als $f \mod \mathfrak{m}_P$. Insbesondere finden wir auch jedes $f \in K$ in einem $\mathcal{O}(U)$ wieder, K ist also wirklich der Funktionenkörper von C_K[22].

Eine offene Teilmenge $U \subseteq C_K$ mit entsprechender Topologie und Strukturgarbe nennen wir *abstrakte nichtsinguläre Kurve.*

Zwar ist (noch) nicht klar, dass so etwas wirklich eine Varietät ist, wir wollen sie aber trotzdem mit solchen in eine gemeinsame Kategorie tun. Dazu müssen wir noch sagen, was die Morphismen seien sollen, aber auch hier fordern wir einfach stetige Abbildungen, die reguläre Funktionen erhalten. Wir können also die abstrakten und „gewöhnlichen" nichtsingulären Kurven in eine gemeinsame Kategorie werfen.

Bemerkung 3.5: Sei X eine abstrakte nichtsinguläre Kurve, Y eine projektive Varietät und $\varphi\colon X \setminus P \longrightarrow Y$ ein Morphismus. Dann lässt sich φ eindeutig zu einem Morphismus $\bar{\varphi}\colon X \longrightarrow Y$ fortsetzen.

Die Konstruktion von $\bar{\varphi}$ ist erstaunlich simpel: Man zieht die erzeugenden regulären Funktionen $\frac{X_i}{X_j}$ an φ zurück und betrachtet das Ergebnis als rationale Funktion f_{ij} auf X. Da $\frac{X_i}{X_j} = \frac{X_i}{X_0} / \frac{X_j}{X_0}$, können wir die Ordnung von f_{ij} bei P immer in Ordnungen von f_{i0} und f_{j0} bei P ausdrücken und von diesen das Minimum nehmen. So kann man die „Polstelle" bei P „aufheben" und φ fortsetzen.

Satz 3: *Jede nichtsinguläre quasi-projektive Kurve ist isomorph zu einer abstrakten nichtsingulären Kurve und jede solche ist isomorph zu einer nichtsingulären projektiven Kurve.*

Damit ist sogar jede Kurve X birational äquivalent zu einer nichtsingulären projektiven Kurve, man kann einfach $C_{K(X)}$ wählen. Damit ist unser „Spezialfall" also gar nicht so speziell.

Das einzusehen ist leider wieder etwas technisch. Wenn man mit einer Kurve anfängt, kann man – ganz kanonisch – P auf $\mathcal{O}_P$ schicken und erhält so eine Bijektion zu einer Teilmenge von C_K. Die Stetigkeit muss man nachrechnen, aber dass die regulären Funktionen auf offenen Teilmengen die gleichen sind, ist dann wieder klar. Siehe dazu auch [Har77, Proposition I.6.7].

[21] Das liegt daran, dass dann auch eines der maximalen Ideale in dem anderen enthalten wäre und das geht nicht.

[22] Einzusehen, dass das alles so funktioniert, ist ein wenig technisch. Man kann es zum Beispiel in [Har77, §I.6] nachlesen.

Die andere Richtung ist aufwendiger: Man kann C_K mit offenen Teilmengen überdecken, die isomorph zu affinen Kurven sind, diese affin abschließen und zeigen, dass C_K isomorph zum projektiven Abschluss ihres direkten Produkts ist. Siehe [Har77, Theorem I.6.9].

Satz 4: *Die folgenden Kategorien sind äquivalent:*

(i) nichtsinguläre projektive Kurven und dominante Morphismen;

(ii) quasi-projektive Kurven und dominante rationale Abbildungen;

(iii) Funktionenkörper von Transzendenzgrad 1 über k und k-Homomorphismen.

Um von (i) nach (ii) zu kommen, müssen wir nur Struktur vergessen. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) hatten wir schon in Satz 2 gesehen und von (iii) nach (i) kommen wir einfach, indem wir K die Kurve C_K zuweisen. Nach Satz 2 erhalten wir für jeden Morphismus in (iii) eine rationale Abbildung zwischen den entsprechenden Kurven und für diese können wir einen Morphismus auf einer offenen Teilmenge der Kurve als Vertreter wählen, der nach Bemerkung 3.5 fortgesetzt werden kann. Da C_K gerade K als Funktionenkörper hat, induzieren diese Funktoren auch tatsächlich die behauptete Äquivalenz.

Nun sind die Analogien zu den Riemannschen Flächen hoffentlich klar, man kann sich sogar noch überlegen, dass Bemerkung 3.5 auch impliziert, dass man jede rationale Funktion auf einer Kurve zu einem Morphismus in den $\mathbb{P}^1$ fortsetzen kann. Auch das kennt man von den Riemannschen Flächen, wir müssen uns also nur noch überlegen, wieso die Kategorie $\mathfrak{Riem}$ wirklich auch zu den Körpererweiterungen von Transzendenzgrad 1 äquivalent ist.

4 Die Äquivalenz der Kategorien

Es ist nicht so schwer einzusehen, dass jede projektive nichtsinguläre Kurve (über $\mathbb{C}$) als (kompakte) Riemannsche Fläche aufgefasst werden kann:

Satz 5: *Sei $\mathcal{C}$ eine projektive nichtsinguläre Kurve über $\mathbb{C}$. Dann können wir $\mathcal{C}$ mit einer komplexen Struktur versehen und so zu einer (kompakten) Riemannschen Fläche machen.*

Insbesondere sind dann auch die Funktionenkörper gleich, wir erhalten also einen Funktor in die Kategorie $\mathfrak{Riem}$.

Wir überdecken unsere Kurve zunächst affin und beschränken uns also auf diesen Fall: Da unsere Kurve nichtsingulär ist, ist für jeden Punkt $p \in \mathcal{C}$ mindestens ein $\frac{\partial f}{\partial X_i}(p)$ nicht 0. Der Satz über implizit definierte Funktionen aus der Analysis sagt uns nun, dass in dieser Situation $\mathcal{C}$ lokal[23] von der Form $(z, g_p(z))$ ist, wobei g_p eine auf dieser Umgebung holomorphe[24] Abbildung ist. Die Projektion auf z liefert uns nun unsere Kartenabbildung und macht X zur Riemannschen Fläche.

Diese ist sogar kompakt, da sie – als Nullstellenmenge eines Polynoms – abgeschlossen im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ ist.

[23] Jetzt aber bezüglich der „komplexen“ Topologie!

[24] Das sichert uns, dass die Kartenwechselabbildungen holomorph sind.

Wir können unsere Karten aber noch anders interpretieren: Sei dazu $t_p \in K(\mathcal{C})$ die Uniformisierende bei p. Dann ist $\operatorname{ord}_p t_p = 1$, also ist t_p auf einer Zariski-Umgebung von p regulär, wir finden dort also homogene Polynome g und $h \neq 0$ mit $t_p = \frac{g}{h}$. Außerdem ist $t_p(p) = 0$. $\frac{g}{h}$ können wir aber auch als meromorphe Funktion auf $\mathcal{C}$ (jetzt als Riemannsche Fläche) auffassen. Da sie bei p eine Nullstelle hat, hat sie da insbesondere keine Polstelle, ist also in einer analytischen (!) Umgebung von p holomorph und – wegen $\operatorname{ord}_p t_p = 1$ – sogar lokal bijektiv und damit als Kartenabbildung geeignet.

Um die Äquivalenz zu sehen, müssen wir nun noch versuchen ohne große Verluste von $\mathfrak{Riem}$ zurück zu den Funktionenkörpern zu kommen. Der Ansatz ist klar: Wir ordnen jeder Riemannschen Fläche ihren Funktionenkörper zu. Dazu brauchen wir erstmal die folgende Aussage.

Bemerkung 4.1: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gibt es eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf X.

Das ist leider alles andere als klar und auch sehr schwierig zu beweisen. Ein paar Stichworte, sowie weiterführende Literatur, findet man in [Har77, Appendix B.3].

Nun müssen wir uns aber zunächst an Divisoren erinnern:

Definition/Bemerkung 4.2: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche.

(a) Wir betrachten die freie abelsche Gruppe über X. Diese nennen wir *Divisorengruppe*. Ein Element aus ihr nennen wir *Divisor* und können es als formale Summe

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$$

für $n_i \in \mathbb{Z}$ und $P_i \in X$ auffassen. Dabei nennen wir $\deg D := \sum n_i$ den *Grad* des Divisors.

Wir nennen D *effektiv*, wenn $n_i \geq 0$ für alle i.

(b) Für $f \in \mathcal{M}(X)^\times$ erhalten wir durch

$$\operatorname{div} f := \sum_{P \in X} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P$$

einen Divisor. Divisoren dieser Form nennen wir *Hauptdivisoren*. Interessant sind auch

$$\operatorname{div}_0 f := \sum_{P \in f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P \text{ und } \operatorname{div}_\infty f := \sum_{P \in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}_P(f) \cdot P,$$

die *Null-* und *Polstellendivisoren*. Das geht, da nach Definition/Bemerkung 1.3 (c) beide Mengen diskret (und daher, weil X kompakt, endlich) sind.

Außerdem gilt $\operatorname{div} f = \operatorname{div}_0 f + \operatorname{div}_\infty f$.

(c) Zu einem Divisor D können wir uns die meromorphen Funktionen anschauen, deren Null- bzw. Polstellenordnungen von D beschränkt werden. Wir schreiben

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X)^\times \mid D + \operatorname{div} f \text{ ist effektiv}\} \cup \{0\}.$$

Das ist ein $\mathcal{M}(X)$-Vektorraum, seine Dimension bezeichnen wir mit $\mathfrak{l}(D)$.

Satz 6: *Indem wir einer kompakten Riemannschen Fläche X ihren Funktionenkörper $\mathcal{M}(X)$ zuordnen, erhalten wir einen Funktor von $\mathfrak{Riem}$ in die Kategorie der Funktionenkörper von Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}$-Homomorphismen.*

Das liefert uns eine Äquivalenz der folgenden Kategorien:

(i) nichtsinguläre projektive Kurven über $\mathbb{C}$ und dominante Morphismen;

(ii) Funktionenkörper von Transzendenzgrad 1 über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$-Homomorphismen;

(iii) kompakte Riemannsche Flächen und nichtkonstante holomorphe Abbildungen.

Wir müssen noch einsehen, wieso $\mathcal{M}(X)$ Transzendenzgrad 1 hat. Da wir eine nichtkonstante meromorphe Funktion haben, hat $\mathcal{M}(X)$ mindestens Transzendenzgrad 1, es genügt also „≤ 1“ zu zeigen.

Wir nehmen also an, es gäbe zwei algebraisch unabhängige Elemente f und g in $\mathcal{M}(X)$, dann definieren wir einen Divisor D, der $D \geq \operatorname{div}_\infty f + \operatorname{div}_\infty g$ erfüllt und effektiv ist, so dass sowohl f als auch g in $\mathcal{L}(D)$ liegen. Insbesondere liegen dann aber auch $f^i g^j \in \mathcal{L}(nD)$, wenn $i + j \leq n$ ist und diese sind alle linear unabhängig über $\mathcal{M}(X)$, da f und g algebraisch unabhängig sind. Damit ist aber aus kombinatorischen Gründen

$$\dim \mathcal{L}(nD) \geq \frac{n^2 + 3n + 2}{2},$$

aber da D effektiv ist, können wir die Dimension mit

$$\dim \mathcal{L}(nD) \leq 1 + \deg(nD) = 1 + \deg(D)n$$

abschätzen[25] und das läuft schief, wenn n groß wird.

Damit hat $\mathcal{M}(X)$ tatsächlich Transzendenzgrad 1 und da die holomorphen Abbildungen gerade so definiert waren, dass sie die Garben respektieren, erhalten wir tatsächlich unseren gewünschten Funktor. Den Rest der Äquivalenzen hatten wir schon in Satz 4 und Satz 5 gesehen.

Literatur

[For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen.* Berlin: Springer, 1977.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Bd. 52. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 1977.

[HS09] Frank Herrlich und Gabriela Schmithüsen. „Dessins d’enfants and origami curves“. In: *Handbook of Teichmueller theory II.* Hrsg. von A. Papadopoulos. European Mathematical Society, 2009, S. 767–809. URL: `http://www.math.kit.edu/iag3/~schmithuesen/media/dessins.pdf`.

[25] Das sieht man, indem man sich die Laurententwicklung eines Elements aus $\mathcal{L}(D)$ anschaut. Siehe zum Beispiel [Mir95, Proposition V.3.16].

[Kap07] André Kappes. „On the Equation of an Origami of Genus two with two Cusps“. Diplomarbeit. 2007.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. Bd. 5. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1995.

[WS10] Gabriela Weitze-Schmithüsen. „Algebraische Geometrie I“. Vorlesungsskript. 2010.