Kohomologie topologischer Räume und Gruppenkohomologie

In diesem ersten Abschnitt des Seminars wollen wir einige grundlegende topologische und algebraische Begriffe einführen.

Vortrag 1: Topologische Grundbegriffe

Ali

Im ersten Vortrag des Seminars soll noch einmal an die Definition eines topologischen Raumes, einer Mannigfaltigkeit, einer Fläche und einer Homotopie zwischen stetigen Abbildungen erinnert werden. Außerdem sollen sowohl topologische als auch kombinatorische Simplizialkomplexe und deren Eulercharakteristik definiert werden.

Vortrag 2: Homologie und Kohomologie topologischer Räume

Cornelius

In diesem Vortrag wollen wir sogenannte Homologiegruppen $\mathrm{H}_*(X)$ und Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^*(X)$ von topologischen Räumen oder Simplizialkomplexen X einführen. Weiterhin sollen – unter Verwendung einiger algebraischer Resultate, deren Beweis wir nachreichen werden – rechnerische Hilfsmittel, wie die lange, exakte Sequenz eines Paares oder die Mayer-Vietoris Sequenz einer exzisiven Triade hergeleitet werden.

Vortrag 3: Homotopiegruppen und der Satz von Hurewicz

Tobias

In diesem Vortrag definieren wir eine weitere Klasse von Invarianten topologischer Räume – die Homotopiegruppen $\pi_*(X)$. Mit Hilfe der Homotopiegruppen lässt sich der für uns zentrale Begriff des Zusammenhangsgrades definieren. Weiterhin gibt es einen fundamentalen Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen $\mathrm{H}_*(X)$ des vorhergehenden Vortrages und diesen Homotopiegruppen $\pi_*(X)$. Dieser Zusammenhang – der Satz von Hurewicz – sollte in diesem Vortrag zumindest skizziert werden.

Vortrag 4: Homologie und Kohomologie von Gruppen

Manuel

Homologie- und Kohomologiegruppen lassen sich nicht nur für topologische Räume sondern auch für algebraische Objekte definieren. In diesem Vortrag soll eine abstrakte Maschinerie, die genau solche Konstruktionen ermöglicht – die sogenannten abgeleiteten Funktoren – vorgestellt werden. Diese abstrakten Techniken wollen wir dann verwenden um Definitionen der Homologie und Kohomologie von Gruppen zu erhalten. Es sollte auch angedeutet werden, wie man von dieser eleganten Definition zu bodenständigeren Argumenten zurückfindet.

Vortrag 5: G-Bündel und klassifizierende Räume

Moritz

In diesem Vortrag lernen wir den Begriff eines prinzipalen G-Bündels über einem topologischen Raum X kennen. Weiterhin werden wir für eine gegebene Gruppe G ein kanonisches Bündel $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ konstruieren und ein Argument skizzieren, welches zeigt, dass die prinzipalen G-Bündel über einem gegebenen Raum X durch Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $X \to \mathrm{B}G$ klassifiziert werden. Desweiteren wollen wir einsehen, dass die Kohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{B}G)$ des Raumes $\mathrm{B}G$ mit der Gruppenkohomologie $\mathrm{H}^*(G)$ übereinstimmt.

Die Abbildungsklassengruppe und der Bogenkomplex

Nachdem wir uns im ersten Teil des Seminars das nötige algebraische und topologische Vokabular erarbeitet haben, wollen wir nun die Hauptakteure unseres Seminars – die Abbildungsklassengruppe und den Bogenkomplex – kennenlernen und einige ihrer Eigenschaften herleiten.

Vortrag 6: Die Abbildungsklassengruppe

Felix

Im Rahmen dieses Vortrages erlernen wir endlich das nötige Vokabular, um den Satz von Harer formulieren zu können. Dazu werden wir die Abbildungsklassengruppe $\Gamma_{g,n}$ einer Fläche $S_{g,n}$ von Geschlecht g mit n Randkomponenten einführen und Abbildungen $\Gamma_{g,n+1} \to \Gamma_{g+1,n}$ und $\Gamma_{g,n} \to \Gamma_{g,n+1}$ definieren. Unser Ziel ist es, die Gruppe $\Gamma_{g,n}$ und diese beiden Abbildungen zu verstehen, indem wir ihre Wirkung auf den Bögen auf einer Fläche $S_{g,n}$ studieren. Die Beziehung zwischen der Abbildungsklassengruppe $\Gamma_{g,n}$ und den Bögen auf einer Fläche sollte hier bereits angedeutet werden.

Vortrag 7: Der Bogenkomplex und Stabilisatoren von Simplizes; I

Anja/Sven

In diesem Vortrag werden wir nach der Vorbereitung im vorhergehenden Vortrag schließlich den Hauptakteur unseres Seminars kennenlernen: den Bogenkomplex. Es stellt sich heraus, dass es zwei verschiedene Typen $\mathcal{O}^1$ und $\mathcal{O}^2$ von Bogenkomplexen gibt. Die Abbildungsklassengruppe $\Gamma_{g,n}$ operiert auf natürliche Weise auf diesen Komplexen. Als Einstieg in und weitere Rechtfertigung für das Studium dieser Komplexe wollen wir die Stabilisatoren $\mathrm{Stab}(\sigma) \subseteq \Gamma_{g,n}$ eines festen Simplex σ bestimmen. Es stellt sich heraus, dass diese Stabilisatoren isomorph zu „kleineren“ Abbildungsklassengruppen sind.

Vortrag 8: Der Bogenkomplex und Stabilisatoren von Simplizes; II

Anja/Sven

Das Studium der Stabilisatoren $\mathrm{Stab}(\sigma)$ eines Simplex σ des Bogenkomplexes soll in diesem Vortrag fortgesetzt werden. Nachdem bisher nur die Operation der Abbildungsklassengruppe im Fokus unserer Aufmerksamkeit stand, wollen wir uns nun den Abbildungen $\Gamma_{g,n+1} \to \Gamma_{g+1,n}$ und $\Gamma_{g,n} \to \Gamma_{g,n+1}$ zuwenden. In diesem Vortrag wollen wir zeigen, dass diese Abbildungen mit den Isomorphismen aus dem vorherigen Vortrag verträglich und in gewissem Sinne dual zueinander sind.

Vortrag 9: Der Zusammenhangsgrad des Bogenkomplexes; I

Yang Lu

Eine wesentliche Zutat für den Beweis des Stabilitätskriteriums von Harer ist, dass die Bogenkomplexe $\mathcal{O}^1$ und $\mathcal{O}^2$ ausreichend hohen Zusammenhangsgrad haben. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Werkzeuge aus der homologischen Algebra aus dem ersten Teil des Seminars. Wir fassen den Bogenkomplex $\mathcal{O}^i$ als Teilkomplex größerer simplizialer Komplexe auf und bekommen eine Kette von Komplexen $\mathcal{O}^i \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. In diesem Vortrag zeigen wir, dass $\mathcal{A}$ meistens kontrahierbar ist und in den übrigen Fällen einen bestimmten Zusammenhangsgrad hat.

Vortrag 10: Der Zusammenhangsgrad des Bogenkomplexes; II

Gabi

In diesem Vortrag verwenden wir das Ergebnis aus dem vorherigen Vortrag um die gewünschte Zusammenhangseigenschaften von $\mathcal{O}^1$ und $\mathcal{O}^2$ zu zeigen. Hierzu zeigen wir schrittweise entsprechende Zusammenhangseigenschaften für die Komplexe B, $\mathcal{B}_0$ und schließlich $\mathcal{O}_i$. Besonders der Beweis für $\mathcal{B}$ verwendet eine sehr trickreiche Induktion.

Spektralsequenzen und der Satz von Harer

In diesem finalen Teil des Seminars werden wir noch ein weiteres algebraisches Hilfsmittel – die Spektralsequenzen – kennenlernen um dann schlussendlich einen Beweis des Satzes von Harer geben zu können.

Vortrag 11: Spektralsequenzen und filtrierte Komplexe

Miriam

Spektralsequenzen sind algebraische Werkzeuge so wie kurze oder lange exakte Sequenzen auch. Leider sind Spektralsequenzen mit mehr technischem Aufwand verbunden und wir wollen deshalb diesen gesamten Vortrag dafür verwenden die für uns relevanten Definitionen zu verstehen und eine mögliche Konstruktion von Spektralsequenzen aus Filtrierungen auf Kettenkomplexen kennenzulernen.

Vortrag 12: Die Spektralsequenz eines Doppelkomplexes

Michael

Aufbauend auf dem vorhergehendem Vortrag wollen wir in diesem Vortrag für jeden Doppelkomplex zwei Spektralsequenzen konstruieren und an Hand von Beispielen sehen, wie man diese gegeneinander ausspielen kann. Um sich an das Rechnen mit Spektralsequenzen zu gewöhnen, können und sollen hier mehrere einfache Beispiele vorgerechnet werden. Insbesondere können wir nun mit relativ geringem Aufwand einige algebraische Lücken der ersten Vorträge schließen.

Vortrag 13: Die Spektralsequenz nach Randal-Williams und Wahl

David

Unser Beweis des Satzes von Harer benutzt eine spezifische Spektralsequenz, deren Konstruktion und Eigenschaften in diesem Vortrag erklärt werden sollen. Hier werden wir die Geometrie Bogenkomplexes in algebraische Eigenschaften übersetzen und müssen noch einmal in die algebraische Trickkiste greifen, um bestimmte Terme der Spektralsequenz mit uns bereits bekannten Kohomologiegruppen zu identifizieren.

Vortrag 14: Der Satz von Harer

Benjamin

In diesem letzten Vortrag des Seminars erreichen wir endlich unser Ziel: Den Satz von Harer. Unser Beweis benutzt eine doppelte Induktion und die Spektralsequenz aus dem vorhergehenden Vortrag. Insbesondere werden wir sehen, dass der Induktionsschritt nur durch die spezifischen geometrischen Eigenschaften des Bogenkomplexes bzw. ihre Übersetzung in algebraische Aussagen ermöglicht wird.