Ein algebraisches Lemma

Sei R ein kommutativer und unitärer Ring und sei $R\text{–Mod}_{\mathbf{Z}}$ die Kategorie der $\mathbf{Z}$-graduierten Linksmoduln über R. Ein Objekt A in $R\text{–Mod}_{\mathbf{Z}}$ ist also eine Familie $A = \{A_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ von Linksmoduln über R und ein Morphismus $f\colon A \to B$ ist nichts anderes als eine Familie $f_i\colon A_i \to B_i$ von R-linearen Abbildungen. Für einen graduierten R-Modul A sei ΩA der graduierte R-Modul mit $\Omega A_i = A_{i+1}$. Offenbar definiert die Vorschrift $A \mapsto \Omega A$ eine Autoäquivalenz von $R\text{–Mod}_{\mathbf{Z}}$, die wir ebenfalls mit Ω bezeichnen.
Es sei Top^2 die Kategorie der Paare von topologischen Räumen. Die Objekte von Top^2 sind also Paare (X, A) bestehend aus einem toplogischen Raum X und einem Teilraum $A \subseteq X$. Die Morphismen von (X, A) nach (Y, B) in Top^2 sind stetige Abbildungen $f\colon X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Wir kürzen das Paar $(X, \emptyset)$ zwar im Folgenden mit X ab, wollen es aber trotzdem als Objekt von Top^2 auffassen. Den offensichtlichen Funktor $\mathrm{Top}^2 \to \mathrm{Top}^2$ der ein Paar (X, A) auf A abbildet, bezeichnen wir mit ω.
Im Folgenden betrachten wir Funktoren $T\colon \mathrm{Top}^2 \to R\text{–Mod}_{\mathbf{Z}}$ mit der Eigenschaft, dass $T(X, X) = 0$ für alle Räume X. Darüberhinaus sind die Funktoren T stets mit einer natürlichen Transformation $\partial\colon \Omega T \to T\omega$ ausgestattet. Anstatt $T(X, A)_n$ schreiben wir auch $T_n(X, A)$ und für ein $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ schreiben wir anstatt $T_n(f)$ oder gar $T(f)_n$ einfach f_*.

Aufgabe: Was soll das alles? Was hat das mit Homologie zu tun?

Wir wollen zeigen, dass die beiden folgenden Aussagen (i) und (ii) äquivalent sind.

(i) Sei (X, B, A) ein Tripel von topologischen Räumen, also ein Raum X mit Teilräumen $X \supseteq B \supseteq A$, und seien $i\colon (B, A) \to (X, A)$, $j\colon (X, A) \to (X, B)$ und $k\colon B \to (B, A)$ die natürlichen Inklusionen von Paaren. Dann ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{k_*\partial_{n+1}} T_n(B, A) \xrightarrow{i_*} T_n(X, A) \xrightarrow{j_*} T_n(X, B) \xrightarrow{k_*\partial_n} \cdots$$

exakt.

(ii) Sei (X, A) ein Paar von topologischen Räumen und seien $i\colon A \to X$ und $j\colon X \to (X, A)$ die natürlichen Inklusionen. Dann ist die Sequenz

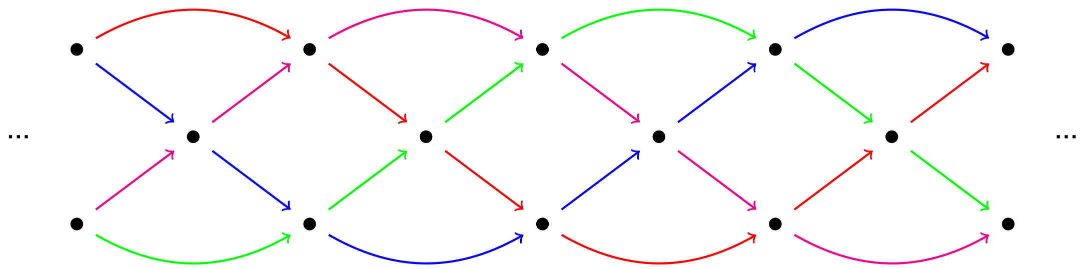
$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} T_n(A) \xrightarrow{i_*} T_n(X) \xrightarrow{j_*} T_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

exakt.

Aufgabe: Die Implikation “(i) $\Rightarrow$ (ii)” ist trivial. Warum?

Die Implikation “(ii) ⇒ (i)” hingegen lässt sich auf folgende algebraische Aussage reduzieren.

Lemma: Sind in einem kommutativen Diagramm von R-Moduln der Form



drei der vier farbigen langen Sequenzen exakt, so ist auch die vierte lange Sequenz exakt — vorausgesetzt, dass die Komposition je zwei aufeinanderfolgender Abbildungen in dieser vierten Sequenz die Nullabbildung ist.

Aufgabe: Warum folgt die Implikation “(ii) ⇒ (i)” aus diesem Lemma?

Aufgabe: Beweise das Lemma und finde ein Beispiel, welches belegt, dass die Voraussetzung an die vierte lange Sequenz tatsächlich notwendig ist.