Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Fabian Januszewski
Martin Barič

Seminar Winter 2018/19: Topologische Gruppen

Topologische Gruppen lernen wir bereits in den ersten Semestern des Studiums kennen: die Gruppen $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^\times, \mathbb{C}^\times, \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \mathrm{U}(n), \ldots$ sind wichtige Beispiele topologischer Gruppen. Andere Beispiele sind elliptische Kurven über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, Tori (d.h. kompakte Gruppen der form $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$), sowie Galoisgruppen ggf. unendlicher Galoiserweiterungen.

Allgemein ist eine topologische Gruppe eine Gruppe G, welche zugleich ein topologischer Raum ist, sodaß die Gruppenverknüpfung $(g,h) \mapsto gh$, sowie die Inversenabbildung $g \mapsto g^{-1}$ jeweils stetig sind.

Das Zusammenspiel von Algebra und Topologie ist sehr fruchtbar und topologische Gruppen sind sehr symmetrische topologische Räume: Für jedes $h \in G$ ist die Translationsabbildung $G \to G, g \mapsto gh$ stetig. Aus dem selben Grund ist die inverse Abbildung $g \mapsto gh^{-1}$ ebenfalls stetig, mithin ist $g \mapsto gh$ ein Homöomorphismus $G \to G$. Das zeigt insbesondere, daß G lokal bei jedem $h \in G$ „gleich aussieht".

Im Seminar werden wir uns zunächst Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie aneignen, die für uns relevant sind: Was ist eine Topologie, was sind Umgebungen, Kompaktheit, Vollständigkeit und lokalkompakte Räume.

Eines unserer Ziele wird sein, lokalkompakte Gruppen besser zu verstehen. Hier werden wir zwei wichtige Sätze kennenlernen: Der Satz vom Haarschen Maß besagt, daß auf jeder lokalkompakten Gruppe G ein eindeutig bestimmtes rechts- (oder wahlweise links-)invariantes Maß μ existiert. Dies hat fundamentale Konsequenzen, insbesondere läßt sich ein L^2-Raum auf G definieren und wir können Analysis betreiben.

Letztendlich führt dies zu Verallgemeinerungen der Fourieranalysis, wobei die klassische Fouriertheorie den beiden Gruppen $\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ entspricht. Für allgemeine abelsche lokalkompakte Gruppen wird die Fouriertheorie durch *Pontryagin-Dualität* beschrieben. Letztere besagt, daß das Pontryagin-Dual $\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ einer abelschen lokalkompakten Gruppe wieder abelsch lokalkompakt ist und weiterhin kanonisch $G \cong \widehat{\widehat{G}}$ gilt.

Einige topologische Eigenschaften von G lassen sich dann an $\widehat{G}$ ablesen: Beispielsweise ist G genau dann diskret, wenn $\widehat{G}$ kompakt ist (und umgekehrt). Es gilt beispielsweise $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, was erklärt, warum in der klassischen Fouriertheorie die Funktionen $x \mapsto e^{2\pi i n x}$, $n \in \mathbb{Z}$, eine Zentrale Rolle spielen: Dies sind gerade die Elemente von $\widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$ und periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind nichts anderes als Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Vorkenntnisse: Einführung in Algebra und Zahlentheorie, geeignet für BA/MA/Lehramt.

Vorbesprechung: Montag den 16. Juli um 14:00 im RS 3.69.