Seminar „Die Catalanvermutung“, Sommersemester 2014

Dr. Fabian Januszewski, PD Dr. Stefan Kühnlein

Wir wollen letztlich zeigen, dass für natürliche Zahlen p, q, x, y aus $x^p - y^q = 1$ folgt, dass $(x, y, p, q) = (3, 2, 2, 3)$. Im Laufe des Programmes werden (x, y, p, q) immer als so ein Viertupel angenommen. Dabei dürfen wir annehmen, dass p und q Primzahlen sind, denn jede Lösung mit nichtprimen Exponenten liefert auch solche mit Primexponenten und größerer Basis.
Ab Vortrag 7 sind p und q immer verschiedene ungerade Primzahlen.
In den ersten 5 Vorträgen ist K stets ein algebraischer Zahlkörper und $\mathcal{O}$ sein Ganzheitsring.

1. Gitter ([K] §2.1 und[N], §I.4 und I.5)
Pascal Schroth
Hier lernen wir, dass $\mathcal{O}$ als Gitter im reellen Vektorraum $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (dem Minkowskiraum) aufgefasst werden kann.
Für Gitter in euklidischen Vektorräumen gilt der Minkowskische Gitterpunktsatz, der die Existenz nichttrivialer Gitterpunkte in symmetrischen konvexen Teilmengen sicherstellt, wenn deren Volumen groß genug ist.

2. Dirichlets Einheitensatz ([K] §2.2 und [N], §I.7)
Tobias Ribizel
Minkowskis Gitterpunktsatz klärt die Struktur der Einheitengruppe $\mathcal{O}^\times$. Diese hängt abgesehen vom endlichen Torsionsanteil nur von den Anzahlen der reellen und nichtreellen Nullstellen des Minimalpolynoms eines Erzeugers von K ab.

3. Die Klassenzahl ([K] §2.4 und [N], §I.6)
Steffen Rödding
Hier weisen wir nach, dass die Klassengruppe von $\mathcal{O}$ endliche Ordnung hat. Wieder hilft Minkowskis Gitterpunktsatz.

4. Verzweigung ([K] §1.3, 3.1 und [N] §III.2)
Christoph Karg
Wir weisen nach, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ genau dann verzweigt ist, wenn sie die Diskriminante von K teilt. Insbesondere folgt daraus der Satz von Minkowski, dass in $K \neq \mathbb{Q}$ mindestens eine Primzahl verzweigt ist.
Im Fall, dass K über $\mathbb{Q}$ galoissch ist, sollten Trägheits- und Zerlegungsgruppen sowie Frobeniuselemente eingefḧrt werden.

5. Der Satz von Kronecker und Weber ([W], S. 321 - 331)
Akin Ünal
Jede endliche Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ mit abelscher Galoisgruppe ist in einem Körper enthalten, der aus $\mathbb{Q}$ durch Adjunktion einer Einheitswurzel entsteht.
Diese Aussage lässt sich auf die entsprechende Aussage für die Körper $\mathbb{Q}_p,\ p \in \mathbb{P}$ zurückführen.
In dieser Situation muss man wieder zwischen verzweigten und unverzweigten Erweiterungen unterscheiden.

6. Zwei Spezialfälle [S, §2 - 4]
Catrin Marz
p und q müssen verschieden sein. Wenn p oder q gleich 2 ist, dann gibt es nur die bekannte Lösung.

7. Cassels Theorem [S, §6]
Claudius Holeksa
Wenn p und q ungerade sind, dann teilt p y und q teilt x.

8. Eine Obstruktiongruppe und Theorem IV [S, §7 und 8]
Lisa Kohl
Was die Obstruktionsgruppe ist soll im Vortrag erklärt werden. Wir sehen danach, dass p und q beide mindestens 43 sein müssen, wenn beide ungerade sind.

9. Das Stickelbergerideal und Theorem 1 [S, §9 und 10]
Michael Klooß
Das Stickelbergerideal ist ein Ideal im Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, wobei G die Galoisgruppe eines Kreisteilungskörpers ist. Die Galoisgruppe operiert auf der Klassengruppe und das Stickelbergerideal annulliert dieselbe. Das macht es interessant.

10. Das Minusargument und der Gruppenring [S, Kap. 11 und 13]
Mathias Fischer
Dieser Vortrag ist zweigeteilt. Das Minusargument impliziert $p \leq 4q^2$ und $q \leq 4p^2$.
Der zweite Teil des Vortrags gibt uns ein paar Sachverhalte für Gruppenringe von abelschen Gruppen an die Hand, die in anderen Vorträgen hilfreich sind.

11. Das Plusargument [S, §12 und 14]
Thomas Agrikola
Hier wird letztlich gezeigt, dass $p \equiv 1 \pmod{q}$ oder $q \equiv 1 \pmod{p}$. Dabei benutzen wir ein erst im letzten Vortrag bereitgestelltes Werkzeug.

12. Chebotarevs Dichtesatz [S, Kap. 15]
Jonathan Simantzik
Der Dichtesatz ist eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Primzahlsatzes. Hier werden Primideale in einer endlichen Galoiserweiterung danach unterteilt, was ihr Frobeniuselement ist. Die Aussage des Dichtesatzes ist eine Präzisierung der qualitativen Aussage, dass jedes Element der Galoisgruppe unendlich oft als Frobeniuselement realisiert wird.

13. Thaines Satz [S, Kap. 16]
Lukas Anastasopoulos
Dieser Satz wurde in Vortrag 11 benutzt. Sein Beweis schließt die dortige Lücke und beendet damit den der Catalanvermutung.

Auf der nächsten Seite steht auch noch etwas…

Termin: Donnerstag, 14.00 Uhr – 15.30 Uhr in K2

Erster Termin ist Donnerstag, der 17.04.2014.

Literatur:

[K] Stefan Kühnlein: *Algebraische Zahlentheorie*, Vorlesungsskript 2010
[N] Jürgen Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 1992 oder spätere Auflage
[S] René Schoof: *Catalan's Conjecture*, Springer 2008
[W] Lawrence Washington: *Introduction to Cyclotomic Fields*, Springer 1997

Hinweise zum Vortrag:
Die Vorträge des Seminars sind auf 90 Minuten ausgelegt, wobei ein wenig Zeit für Diskussionen eingeplant werden sollte.
Von der Stofffülle her wird es so sein, dass bei vielen Vorträgen nicht alle Details vorgeführt werden können, sodass Sie hier eine Auswahl treffen müssen, was Sie wirklich im Detail präsentieren. Manchmal ist ein gutes Beispiel besser als ein technischer Beweis, den so schnell dann ohnehin niemand nachvollziehen kann.
Den technischen Beweis muss man natürlich trotzdem parat haben, denn alle dürfen alles nachfragen.

Die angegebene Literatur ist hoffentlich gut für die Vorbereitung geeignet. Sie soll insbesondere die Stoffauswahl präzisieren und ersetzt eigene Literaturrecherche nicht vollständig.

Eine Woche vor dem Vortrag sollte dieser grob fertig sein, damit Sie dann Zeit haben, die Argumente zu verinnerlichen und einen ansprechenden Vortrag zu gestalten.
Zum Vortrag gehört auch ein Handout, dem die wichtigsten Begriffe und Sachverhalte zu entnehmen sein sollten.
Außerdem gehört selbstverständlich die regelmäßige aktive Teilnahme an den Sitzungen zum Bestehen des Seminars dazu.

Für Ihre Fragen und Probleme haben wir - Fabian Januszewki und Stefan Kühnlein - stets ein offenes Ohr. Und wenn Sie nicht von selbst zu uns kommen, werden wir Sie nötigen, dies zu tun;-)