Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

10. Februar 2015

Dr. Fabian Januszewski

Garbenkohomologie in Analysis und Topologie – Ferienübungsblatt

Aufgabe 1. *Definition und UAE von $h_!$.*
Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $U \subseteq X$ offen. Zeige:

a) Für ein $s \in \Gamma(U;\mathcal{F})$ ist die Menge
$$T(s) \;:=\; \{x \in U \mid 0 \neq s_x \in \mathcal{F}_x\}$$
stets in U abgeschlossen. Mithin gilt $\mathrm{Tr}(s) = T(s)$.

b) Es sei Y ein weiterer topologischer Raum, welcher X als lokal abgeschlossenen Unterraum enthält und es bezeichne $h : X \to Y$ die Inklusion. Die Zuordnung
$$U \;\mapsto\; \Gamma(U; h_!\mathcal{F}) := \{s \in \Gamma(U \cap X;\mathcal{F}) \mid \mathrm{Tr}(s) \text{ ist in } U \text{ abgeschlossen}\}$$
definiert eine Garbe $h_!\mathcal{F}$ auf Y, welche eine Untergarbe von $h_*\mathcal{F}$ ist.

c) Der Funktor $h_! : \underline{\mathrm{Garb}}_k(X) \to \underline{\mathrm{Garb}}_k(Y)$ ist eine Äquivalenz zwischen der Kategorie $\underline{\mathrm{Garb}}_k(X)$ und der vollen Unterkategorie von $\underline{\mathrm{Garb}}_k(Y)$ der Garben $\mathcal{G}$ mit der Eigenschaft
$$\mathcal{G}_y \;=\; 0$$
für alle $y \in Y - X$. Insbesondere ist $h_!$ exakt.

d) Wenn $X \subseteq Y$ abgeschlossen ist, dann gilt $h_! = h_*$.

e) Es sei $h : X \to Y$ wie in b) und $f : Z \to Y$ stetig, dann ist $f^{-1}(X) \subseteq Z$ lokal abgeschlossen. Wenn wir mit $k : f^{-1}(X) \to Z$ und $g : f^{-1}(X) \to X$ die Inklusion bezeichnen, so gilt $k_! g^* \cong f^* h_!$.

Aufgabe 2. *$h_!$ auf der Kohomologie.*
Es bezeichne $h : W \to X$ die Einbettung einer lokal abgeschlossenen Teilmenge in einen lokalkompakten Raum X. Zeige:

a) Es gilt für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf W:
$$\Gamma_c(W;\mathcal{F}) = \Gamma_c(X; h_!\mathcal{F}).$$

b) Für jede weiche Garbe $\mathcal{W}$ auf W ist $h_!\mathcal{W}$ auf X weich.
Hinweis: Zeige, unter Verwendung von Teil a) und 1 e), daß $\Gamma_c(X; h_!\mathcal{W}) \to \Gamma_c(K; h_!\mathcal{W})$ für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ surjektiv ist.

c) Es gilt für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf W:
$$H_c^\bullet(W;\mathcal{F}) = H_c^\bullet(X; h_!\mathcal{F}). \tag{1}$$
Hinweis: Beginne mit einer injektiven Auflösung von $\mathcal{F}$ und argumentiere mit b), daß Anwendung von $h_!$ eine $\Gamma_c(X;-)$-azyklische Auflösung von $h_!\mathcal{F}$ produziert. Der Isomorphismus (1) *ergibt sich dann mit a).*

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *Mayer-Vietoris-Sequenz mit kompakten Träger.*
Es bezeichne $i, j : U, V \to X$ die Einbettungen offener Teilmengen in einen lokalkompakten Raum X, und $h : U \cap V \to X$ und $k : U \cup V \to X$ die entsprechenden Pfeile. Es sei weiterhin $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Zeige:

a) $i_!$ ist linksadjungiert zu i^*.

b) Die Koeinheit $i_! i^* \to \mathbf{1}$ induziert mit 2 b) einen Pfeil

$$i_! : \quad H_c^\bullet(U; \mathcal{F}) \to H_c^\bullet(X; \mathcal{F}).$$

c) Wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to h_! h^* \mathcal{F} \to i_! i^* \mathcal{F} \oplus j_! j^* \mathcal{F} \to k_! k^* \mathcal{F} \to 0. \tag{2}$$

d) Die lange exakte Kohomologiesequenz zu (2) induziert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_c^q(U \cap V; \mathcal{F}) \to H_c^q(U; \mathcal{F}) \oplus H_c^q(V; \mathcal{F}) \to H_c^q(U \cup V; \mathcal{F}) \to H_c^{q+1}(U \cap V; \mathcal{F}) \to \cdots$$

Aufgabe 4. *Eine weitere nützliche lange exakte Sequenz.*
Es bezeichne $j : U \to X$ die Einbettung einer offenen Teilmenge und es bezeichne $i : Z \to X$ die Einbettung des (abgeschlossenen) Komplementes. Es sei weiterhin $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und X lokalkompakt. Zeige:

a) Für jede Garbe $\mathcal{F}$ auf X haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to j_! j^* \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_* i^* \mathcal{F} \to 0. \tag{3}$$

b) Die lange exakte Kohomologiesequenz zu (3) induziert eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to H_c^q(U; \mathcal{F}) \to H_c^q(X; \mathcal{F}) \to H_c^q(Z; \mathcal{F}) \to H_c^{q+1}(U; \mathcal{F}) \to \cdots$$

Hinweis: Benutze 2 b) und die analoge Aussage für i_* aus der Vorlesung (Proposition 5.12).

Aufgabe 5. *Anwendung auf die Kohomologie des $\mathbb{R}^n$.*
Es bezeichne $N \in S^n$ den Nordpol der n-Sphäre. Zeige:

a) Stereographische Projektion induziert einen Homöomorphismus $S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$.

b) Es gilt

$$H_c^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Benutze die lange exakte Sequenz aus 4 b) für $X = S^n$, $U = \mathbb{R}^n$ und $Z = \{N\}$ und unser Wissen über die Kohomologie der S^n (Proposition 7.9).