Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

22. April 2013

Dr. Fabian Januszewski

Homotopietheorie simplizialer Mengen – Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie bzw. ein Gruppoid und E eine Klasse von Objekten in $\mathcal{C}$ und für je zwei $A, B \in E$ sei eine Teilmenge $E_{AB} \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Der Durschnitt aller Kategorien bzw. Gruppoide, welche E und alle E_{AB} enthalten, ist eine Kategorie bzw. ein Gruppoid $\langle E \rangle$, das *Erzeugnis* von E. Es kommt mit einer natürlichen Inklusion $I : \langle E \rangle \to \mathcal{C}$.

b) Sind $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren, welche auf E und allen E_{AB}, $A, B \in E$ übereinstimmen, so stimmen F und G auf $\langle E \rangle$ überein, d.h. $F \circ I = G \circ I$.

c) Es existiert ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ von Kategorien bzw. Gruppoiden mit $F(\mathcal{C}) \neq \langle F(\mathcal{C}) \rangle$, d.h. das (naive) Bild eines Funktors ist im Allgemeinen keine Kategorie bzw. kein Gruppoid.

Aufgabe 2

Es bezeichne $\mathcal{C}at$ die Kategorie der kleinen Kategorien und $\mathcal{G}rpd$ die Kategorie der kleinen Gruppoide, jeweils mit Funktoren als Morphismen. Zeigen Sie:

a) Ein Pfeil $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $\mathcal{C}at$ bzw. $\mathcal{G}rpd$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn er injektiv auf Objekten und Morphismen ist.

b) Ein Pfeil $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ in $\mathcal{C}at$ bzw. $\mathcal{G}rpd$ ist ein Epimorphismus, wenn $F(\mathcal{C})$ die Kategorie bzw. das Gruppoid $\mathcal{D}$ erzeugt.

c) Die Umkehrung in Aussage b) gilt in $\mathcal{G}rpd$, aber nicht in $\mathcal{C}at$.

Aufgabe 3

Wir haben einen Vergißfunktor $V : \mathcal{G}rpd \to \mathcal{E}ns$, welcher ein kleines Gruppoid $\mathfrak{G}$ auf die Menge der Objekte in $\mathfrak{G}$ abbildet.

a) Vervollständigen Sie die Definition von V für Pfeile.

b) Zeigen Sie, daß der Funktor V linksadjungiert zum *codiskreten Gruppoid* Funktor $C : \mathcal{E}ns \to \mathcal{G}rpd$ ist, welcher einer Menge M das Gruppoid $C(M)$ zuordnet, dessen Objekte die Elemente aus M sind, und weiterhin für $m, n \in M$ stets $\#\mathrm{Mor}_{C(M)}(m, n) = 1$ gilt.

c) Der Funktor V ist rechtsadjungiert zum *diskreten Gruppoid*[1] Funktor $D : \mathcal{E}ns \to \mathcal{G}rpd$, welcher einer Menge M das Gruppoid $D(M)$ zuordnet, dessen Objekte wieder die Elemente aus M sind, wobei die Morphismen durch

$$\#\mathrm{Mor}_{D(M)}(m, n) = \delta_{mn} \quad \text{(Kronecker-Delta)}$$

gegeben sind.

[1] In der Literatur ist der Term *diskretes Gruppoid* anders belegt.