Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

29. April 2013

Dr. Fabian Januszewski

Homotopietheorie simplizialer Mengen – Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Wie in der Vorlesung bezeichne Δ die Kategorie der endlichen Ordinalzahlen $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots$. Zeigen Sie:

a) In Δ ist ein Pfeil $f : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ genau dann ein Mono- bzw. ein Epimorphismus, wenn er, aufgefaßt als ordnungserhaltende Abbildung $f : \{0, \ldots, m\} \to \{0, \ldots, n\}$ injektiv bzw. surjektiv ist.

b) Jeder Pfeil $f : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ besitzt eine Faktorisierung $f = i \circ p$, wobei i ein Monomorphismus und p ein Epimorphismus ist.

c) Der Pfeil $f : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ ist genau dann ein Monomorphismus, wenn

$$f = d^{i_{n-m}} \circ d^{i_{n-m-1}} \circ \cdots \circ d^{i_1},$$

mit $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_{n-m} \leq n$ (die Indizes $i_1, \ldots, i_{n-m}$ sind dann eindeutig bestimmt).

d) Der Pfeil $f : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn

$$f = s^{p_1} \circ s^{p_2} \circ \cdots \circ s^{p_{m-n}}$$

mit $0 \leq p_1 < p_2 < \ldots p_{m-n} < m$ (auch hier sind $p_1, \ldots, p_{n-m}$ dann eindeutig).

e) Die Menge der Objekte $E = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots\}$ zusammen mit den Morphismenmengen $E_{\mathbf{n},\mathbf{n+1}} := \{d^0, \ldots, d^{n+1}\}$ und $E_{\mathbf{n+1},\mathbf{n}} := \{s^0, \ldots, s^n\}$ für jedes $\mathbf{n} \in E$ erzeugen die Kategorie Δ.

Aufgabe 2

Es sei S eine simpliziale Menge und $x \in S(\underline{n})$ ein n-Simplex. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) Der x entsprechende Pfeil $\xi : \Delta^n \to S$ ist ein Monomorphismus.

b) Die Abbildung $\xi(\underline{0}) : \Delta^n(\underline{0}) \to S(\underline{0})$ ist injektiv.

Zeigen Sie weiterhin, daß im Fall von (a) bzw. (b) x nicht-degeneriert ist und zeigen Sie, daß die Umkehrung im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 3

Es seien $m, n \geq 0$. Zeigen Sie:

a) Die nicht-degenerierten Simplizes maximaler Dimension in $\Delta^m \times \Delta^n$ sind $m + n$-Simplizes.

b) Die nicht-degenerierten $m+n$-Simplizes in $\Delta^m \times \Delta^n$ entsprechen bijektiv den Pfaden im Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von $(0, 0)$ nach (m, n), wobei als Einzelschritte lediglich $+(1, 0)$ („eins nach rechts“) und $+(0, 1)$ („eins nach oben“) erlaubt sind.

c) Der Differenzcokern der nicht-degenerierten $m+n$-Simplizes in $\Delta^m \times \Delta^n$ ist $\Delta^m \times \Delta^n$.