Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Fabian Januszewski

13. Mai 2013

Homotopietheorie simplizialer Mengen – Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß jede simpliziale Gruppe G (als simpliziale Menge) ein Kankomplex ist.

Aufgabe 2

Es sei X eine simpliziale Menge. Wir definieren die *Realisierung* von X als den topologischen Raum

$$|X| := \operatorname*{colim}_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|.$$

Zeigen Sie:

a) $|\cdot| : \mathrm{sEns} \to \mathrm{Top}$ ist ein Funktor.

b) Der Funktor $|\cdot|$ ist linksadjungiert zu Sing.
Hinweis: Nutzen Sie Proposition II.5.

c) Für jede simpliziale Menge ist die Realisierung $|X|$ ein CW-Komplex.
Hinweis: Nutzen Sie aus, daß X durch seine n-Skelette ausgeschöpft wird, und daß das $n+1$-Skelett als Pushout aus dem n-Skelett durch ankleben von $n+1$-Zellen entsteht.

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, daß für jeden topologischen Raum T die simpliziale Menge $\mathrm{Sing}(T)$ ein Kankomplex ist. Zeigen Sie hierzu:

a) Es existiert eine stetige Abbildung $|\Delta^n| \to |\Lambda_i^n|$, welche eingeschränkt auf das Horn die Identität ist.

b) Folgern Sie, daß $\mathrm{Sing}(T)$ ein Kankomplex ist.

Aufgabe 4

Für eine beliebige Indexmenge I betrachten wir die simpliziale Menge

$$\mathrm{Stern}(I) := \bigvee_{i \in I} \Delta^1,$$

welche aus dem I-fachen Produkt der 1-Simplizes Δ^1 entsteht, indem wir die 0-Simplizes $d_1(\Delta^1)$ identifizieren. Für $i \in I$ haben wir eine natürliche Inklusion $j_i : \Delta^1 \to \mathrm{Stern}(I)$. Wir schreiben $\mathbb{F}$ für die Menge aller Folgen $f = (f_1, f_2, \dots)$ natürlicher Zahlen. Zeigen Sie:

a) Wir haben die abgeschlossene Teilmenge

$$\{(|j_n|(1/n), |j_f|(1/f_n)) \mid n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{F}\} \subseteq |\mathrm{Stern}(\mathbb{N}) \times \mathrm{Stern}(\mathbb{F})|\,.$$

b) Diese Teilmenge ist in $|\mathrm{Stern}(\mathbb{N})| \times |\mathrm{Stern}(\mathbb{F})|$ nicht abgeschlossen, denn $(|d_1(\Delta^1)|, |d_1(\Delta^1)|)$ liegt im Abschluß. Insbesondere vertauscht die Realisierung *nicht* mit endlichen Limiten.