Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

26. Mai 2013

Dr. Fabian Januszewski

Homotopietheorie simplizialer Mengen – Übungsblatt 4

Wie in der Vorlesung bezeichne B_1 die Menge aller Horn-Inklusionen $\Lambda_k^n \to \Delta^n$, B_2 die Menge aller Inklusionen

$$(\Delta^1 \times \partial\Delta^n) \cup (\{e\} \times \Delta^n) \;\to\; \Delta^1 \times \Delta^n, \quad e \in \{0,1\},$$

und analog B_3 die Klasse aller Inklusionen der Form

$$(\Delta^1 \times Y) \cup (\{e\} \times X) \;\to\; \Delta^1 \times X, \quad e \in \{0,1\}, Y \subseteq X.$$

Wie in der Vorlesung bezeichne M_B die saturierte Hülle einer Klasse B von Monomorphismen.

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, daß $M_{B_1} = M_{B_2} = M_{B_3}$ gilt. Zeigen Sie hierzu:

a) $B_1 \subset M_{B_3}$.
Hinweis: $\Lambda_k^n \to \Delta^n$ ist ein Retrakt von

$$(\Delta^1 \times \Lambda_k^n) \cup (\{e\} \times \Delta^n) \;\to\; \Delta^1 \times \Delta^n$$

für geeignetes $e \in \{0,1\}$.

b) $B_2 \subset M_{B_3}$.

c) $B_3 \subset M_{B_2}$.
Hinweis: Nutzen Sie aus, daß X Colimes seiner n-Skelette ist.

d) $B_2 \subset M_{B_1}$.
Hinweis: Aus Ausgabe 3 von Übungsblatt 2 wissen wir, daß es für jedes $0 \leq j \leq n$ genau einen nichtdegenerierten Simplex $x_j : \Delta^{n+1} \to \Delta^1 \times \Delta^n$ gibt, welcher den j-ten 0-Simplex von Δ^n zweimal trifft. Für $-1 \leq i \leq n$ bezeichne $(\Delta^1 \times \Delta^n)^{(i)}$ die von $(\Delta^1 \times \partial\Delta^n)$ und $x_0, \ldots, x_i$ erzeugte simpliziale Untermenge von $(\Delta^1 \times \Delta^n)$. Dann haben wir ein Pushoutdiagramm

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_{i+2}^{n+1} \arrow[r, "{(d_0x_{i+1},\ldots,\widehat{d_{i+2}x_{i+1}},\ldots,d_{n+1}x_{i+1})}"] \arrow[d] & (\Delta^1 \times \Delta^n)^{(i)} \arrow[d] \\
\Delta^{n+1} \arrow[r, "x_{i+1}"] & (\Delta^1 \times \Delta^n)^{(i+1)}
\end{tikzcd}$$