Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Frank Herrlich
Dipl.-Math. Benjamin Peters

Telefon: +49 (0) 721/608-43194
E-Mail: herrlich@kit.edu

Seminar im Wintersemester 2015/16
Teichmüllerräume und Teichmüllerkurven

1. Grundlagen

Riemannsche Flächen, Definition und erste Beispiele; Fundamentalgruppe einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht g; elliptische Integrale und Tori.

Literatur: [9], 1.1.

2. Komplexe Tori und elliptische Kurven

Gitter in $\mathbb{R}^2$, Homothetie; Klassifikation der Gitter; biholomorphe Äquivalenz von Tori, $\mathbb{H}/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ als Modulraum; elliptische Kurven, Weierstraß-Gleichung; Weierstraßsche $\wp$-Funktion, elliptische Funktionen, Differentialgleichung der $\wp$-Funktion.

Literatur: [9] 1.2, [13] III, Prop. 3.1 und VI, § 3.

3. Kompakte Riemannsche Flächen und projektive nichtsinguläre Kurven

Der Körper der meromorphen Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche ist eine endlich erzeugte Körpererweiterung von $\mathbb{C}$ vom Transzendenzgrad 1; jeder solche Körper ist der Funktionenkörper einer eindeutigen nichtsingulären projektiven Kurve; diese wiederum hat eine Struktur als kompakte Riemannsche Fläche: alle drei Kategorien sind äquivalent.

Literatur: [6] I, § 6 und [12] III oder [4] § 14, alternativ [5] 5.1.4 und 5.1.7.

4. Der Uniformisierungssatz

Einfach zusammenhängende Gebiete in $\hat{\mathbb{C}}$: der Riemannsche Abbildungssatz; Greensche Funktionen, „positiv berandete“ Riemannsche Flächen sind biholomorph äquivalent zum Einheitskreis; harmonische Funktionen auf „nullberandeten“ Riemannschen Flächen.

Literatur: [2] IX, § 7 und [3] IV, § 1–5.

5. Fuchssche Gruppen

Holomorphe Automorphismen der oberen Halbebene, Klassifikation der Möbiustransformationen, Fuchssche Gruppen; markierte Riemannsche Flächen, Teichmüllerraum, heuristische Bestimmung der Dimension.

Literatur: [9] 2.3, 2.4 und 2.5.

6. Hyperbolische Struktur

Hyperbolische Metrik auf der oberen Halbebene, Möbiustransformationen als hyperbolische Isometrien von $\mathbb{H}$; hyperbolische Struktur auf (kompakten) Riemannschen

Flächen; Flächeninhalt und Formel von Gauß-Bonnet.

Literatur: [10] 1.1–1.4, 3.6 und Ex. 4.6.

7. Der Satz von Grötzsch

Quasikonforme Abbildungen, Dilatation; Teichmüllers Extremalproblem; für Rechtecke sind affine Abbildungen extremal (Satz von Grötzsch).

Literatur: [1] 11.1 und 11.5; alternativ: Auswahl aus [9] Ch. 4.

8. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Teichmüller

Holomorphe quadratische Differentiale, Teichmüller-Abbildung zwischen kompakten Riemannschen Flächen vom gleichen Geschlecht; Existenz und Eindeutigkeit einer Teichmüller-Abbildung in einer gegebenen Homotopieklasse; Teichmüllerraum in Bezug auf eine Referenzfläche; Teichmüllermetrik.

Literatur: [1] 11.3, 11.4, 11.6–11.8.

9. Die Abbildungsklassengruppe Mod_g

Isotopie von Homöomorphismen, Abbildungsklassengruppe; das Lemma von Alexander („Alexander-Trick"); erste Beispiele, insbesondere der Torus; die Alexander-Methode.

Literatur: [1] 2.1–2.3.

10. Der Satz von Dehn-Nielsen

Funktorialität der Fundamentalgruppe, äußere Automorphismen, jeder Automorphismus der Fundamentalgruppe wird von einem Homöomorphismus der Fläche induziert; Folgerung: die beiden Definitionen des Teichmüllerraums aus Vortrag 5 und Vortrag 8 sind äquivalent; zum Beweis: Koordinatenwechsel-Prinzip; Liften auf die obere Halbebene; Import aus der Geometrischen Gruppentheorie: Quasi-Isometrien, Cayley-Graph, Satz von Milnor-Schwarz.

Literatur: [1] 8.1, 8.2 (+ 1.3), [9] 1.3.

11. Der Modulraum M_g

Die Aktion von Mod_g auf T_g ist eigentlich diskontinuierlich, Diskretheit des Längenspektrums einer hyperbolischen Fläche, Lemma von Wolpert; die Aktion ist isometrisch bezüglich der Teichmüllermetrik.

Literatur: [1] 12.3, [9] 6.3.

12. Teichmüllerkreisscheiben

Translationsstrukturen auf Flächen, Polygone, holomorphe Differentiale; affine Deformationen, $\mathbb{H} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Teichmüllerkreisscheiben.

Literatur: [11] 1.2, [8] 2.3.

13. Die Veechgruppe

Affine Abbildungen, Ableitung, Veechgruppe; Beispiel: Torus; Veechgruppen sind Fuchssche Gruppen.

Literatur: [11] 4.1 und Satz 5.

14. Origamis und andere Teichmüllerkurven

Die Veechgruppe als Stabilisator der Teichmüllerkreisscheibe, Bild im Modulraum, Teichmüllerkurven; Origamis; die Veechgruppe eines Origamis ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index.

Literatur: [8] 2.4, [7] 4.3, 4.4 und Teile von 5.

Literatur

[1] B. Farb und D. Margalit: *A Primer on Mapping Class Groups.* Princeton University Press 2012.

[2] W. Fischer und I. Lieb: *Funktionentheorie.* Vieweg Aufbaukurs Mathematik 1988.

[3] W. Fischer und I. Lieb: *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie.* Vieweg Aufbaukurs Mathematik 1988.

[4] O. Forster: *Riemannsche Flächen.* Springer 1977.

[5] G. Harder: *Lectures on Algebraic Geometry I.* Vieweg+Teubner 2011.

[6] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry.* Springer Grad. Texts in Math. 52, 1977.

[7] F. Herrlich: *Introduction to origamis in Teichmüller space.* In: Strasbourg Master Class on Geometry, ed. A. Papadopoulos, Europ. Math. Soc. 2012, pp.233 - 253.

[8] F. Herrlich und G. Schmithüsen: *On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space.* In: Handbook of Teichmüller Theory Vol. I, ed. A. Papadopoulos, Europ. Math. Soc. 2007, pp. 293 - 349.

[9] Y. Imayoshi und M. Taniguchi: *An Introduction to Teichmüller Spaces.* Springer 1992.

[10] S. Katok: *Fuchsian Groups.* The University of Chicago Press 1992.

[11] A. Randecker: *Unendliche Translationsflächen.* Skript zur Vortragsreihe, Karlsruhe 2013.

[12] E. Reyssat: *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann.* Birkhäuser 1989.

[13] J. Silverman: *The Arithmetic of Elliptic Curves.* Springer Grad. Texts in Math. 106, 1986.