Kategorien

Wir wollen hier einen kleinen Einblick in die Welt der Kategorien geben. Insbesondere wollen wir nicht primär Kategorien um ihrer selbst willen untersuchen, sondern eben vor allem betonen, dass sie sehr gut als Sprache geeignet sind, in der sich parallele Entwicklungen aus verschiedensten Ecken und Winkeln der Mathematik in einem gemeinsamen Rahmen beschreiben lassen.

1. Liebe auf den ersten Blick

1.1 Definition (*Kategorie, Morphismen*)

a) Eine *Kategorie* $\mathcal{K}$ besteht aus der Vorgabe einer Klasse $\mathrm{Ob}\,(\mathcal{K})$ von sogenannten *Objekten*, der Vorgabe einer Menge $\mathrm{Mor}\,(A,B)$ für je zwei dieser Objekte – die sogenannte *Morphismenmenge* –, und der Vorgabe von „Verknüpfungsabbildungen“

$$\circ : \mathrm{Mor}(A,B) \times \mathrm{Mor}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A,C), \quad (\Phi,\Psi) \mapsto \Psi \circ \Phi,$$

sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Wenn A,B,C,D Objekte von $\mathcal{K}$ sind und $(A,B) \neq (C,D)$ gilt, dann sind die Mengen $\mathrm{Mor}(A,B)$ und $\mathrm{Mor}(C,D)$ disjunkt.
- Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h. für je vier Objekte A,B,C,D und Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}(A,B)$, $\beta \in \mathrm{Mor}(B,C)$, $\gamma \in \mathrm{Mor}(C,D)$ gilt
$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$
- Für jedes Objekt A von $\mathcal{K}$ gibt es im Magma $\mathrm{Mor}(A,A) =: \mathrm{End}(A)$ ein Element 1_A, sodass für alle Objekte B und Morphismen $\alpha \in \mathrm{Mor}(A,B)$ und $\beta \in \mathrm{Mor}(B,A)$ gilt:
$$\alpha \circ 1_A = \alpha, \quad 1_A \circ \beta = \beta.$$

Insbesondere ist 1_A das neutrale Element von $\mathrm{End}(A)$ und ist damit eindeutig, denn die Verknüpfung ist assoziativ.

$\mathrm{End}(A)$ ist ein Monoid, seine Elemente heißen die *Endomorphismen* von A.

b) Es sei $\mathcal{K} := (\mathrm{Ob}(\mathcal{K}), \mathrm{Mor}(-,-), \circ)$ eine Kategorie. Dabei steht $\mathrm{Mor}(-,-)$ abkürzend für die Gesamtheit aller Morphismenmengen. Dann heißt ein Morphismus $\alpha \in \mathrm{Mor}(A,B)$ ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $\beta \in \mathrm{Mor}(B,A)$ gibt, sodass

$$\alpha \circ \beta = 1_B \quad \text{und} \quad \beta \circ \alpha = 1_A.$$

Der Morphismus β ist dann durch α eindeutig bestimmt, denn die Verknüpfung ist ja assoziativ, und aus $\alpha \circ \gamma = 1_B$ folgt zum Beispiel

$$\beta = \beta \circ 1_B = \beta \circ (\alpha \circ \gamma) = (\beta \circ \alpha) \circ \gamma = 1_A \circ \gamma = \gamma.$$

Wenn es so einen Isomorphismus gibt, dann heißen A und B isomorph.

Ein Isomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}(A)$ heißt ein *Automorphismus* von A. Die Menge aller Automorphismen von A ist eine Gruppe, $\mathrm{Aut}(A)$.

c) Anstelle von Morphismen spricht man auch oft von *Homomorphismen* oder auch nur von *Pfeilen*. Statt $\Phi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ schreibt man oft auch $\Phi : A \longrightarrow B$ oder $A \xrightarrow{\Phi} B$. Hier muss man natürlich höllisch aufpassen, dass man nicht zu sehr versucht ist zu meinen, dass Morphismen immer Abbildungen sein müssten.

Nach so einer schönen Definition will man sich eigentlich gar nicht mit den Niederungen der Beispiele abgeben... trotzdem:

1.2 Beispiele (*für Kategorien*)

a) Die Kategorie $\underline{Men}$ aller Mengen hat als Objekte die Mengen, als Morphismen zwischen zwei Mengen einfach alle Abbildungen und als Verknüpfung die Komposition der Abbildungen. In der Literatur wird diese Kategorie auch mit $\underline{Sets}$ oder $\underline{Ens}$ (aus dem Französischen) bezeichnet. 1_A ist natürlich die Identität auf A.

Insbesondere sieht man an diesem Beispiel, dass $\mathrm{Mor}(A, B)$ auch leer sein darf: es gibt keine Abbildung von $A := \{0\}$ in die leere Menge.

b) Genauso wohlbekannt ist die Kategorie der Gruppen, $\underline{Gruppen}$, deren Objekte eben die Gruppen sind, und die Morphismen die Gruppenhomomorphismen. Hier sind die Morphismenmengen immer nichtleer.

c) Die Kategorien $\underline{Ringe}$ aller Ringe, $\underline{R - Mod}$ aller R-Moduln (für einen festen Ring R) und $\underline{G - Men}$ aller G-Mengen (für eine feste Gruppe G) sind ebenso auf naheliegende Weise definiert.

1.3 Bemerkung

a) Diese Beispiele, die man ja wirklich behandeln will, zeigen, dass es zu restriktiv wäre, zu verlangen, dass die „Gesamtheit“ aller Objekte einer Kategorie eine Menge bildet. Daher der vorsichtigere Ausdruck „Klasse“. Diesen wollen wir hier nicht näher präzisieren. Er verbietet eben einige Konstruktionen mit der Gesamtheit aller Objekte.

Eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, heißt eine *kleine Kategorie*.

b) Ein sehr krasses Beispiel ist die Kategorie aller nulldimensionalen K-Vektorräume. Die Objekte sind alle einelementigen Mengen, die eben insgesamt keine Menge bilden. Auf jeder einelementigen Menge gibt es genau eine K-Vektorraumstruktur, und je zwei solche Vektorräume sind zueinander isomorph. Wenn man die Kategorie aller nulldimensionalen Vektorräume ersetzt durch die Kategorie, die nur noch einen Raum $\{0\}$ als Objekt hat, mit den offensichtlichen Morphismen, so hat man die Kategorie aller nulldimensionalen Vektorräume durch eine kleine Kategorie ersetzt ohne dabei Information zu verlieren.

Dieses Glück ist uns natürlich nicht immer hold, aber manchmals ist es so, dass sich eine Kategorie durch eine kleine Kategorie ersetzen lässt, siehe Proposition 2.8.

Denken Sie nur an die Lineare Algebra, wo man statt mit der Kategorie aller endlichdimensionalen Vektorräume auch sehr lange mit der Kategorie aller Standardvektorräume K^n auskommt.

c) Jedes Monoid $(M, *)$ kann als Endomorphismenmenge in einer geeigneten Kategorie realisiert werden. Dazu nehmen wir einfach die Kategorie mit nur einem Objekt A, mit $\mathrm{Mor}(A, A) := M$, und mit $*$ als Verknüpfungsabbildung.

Insbesondere kann man eine Gruppe definieren als eine Kategorie mit nur einem Objekt, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist. (Streng genommen ist die Gruppe dann die Menge all dieser Morphismen – siehe Ende der Definition 1.1.)

Eine kleine Kategorie, in der jeder Morphismus ein Isomorphismus ist, heißt ein *Gruppoid*. Dieser Begriff ist vielleicht in der Topologie wichtiger als in der Algebra.

1.4 Beispiel (*geordnete Mengen als Kategorien*)

a) Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Dann kann man daraus eine Kategorie $\mathcal{M}$ machen, deren Objekte gerade die Elemente von M sind, und deren Morphismenmengen so aussehen:

$$\forall a, b \in M : \mathrm{Mor}(a, b) := \begin{cases} \{\leq (a, b)\}, & \text{falls } a \leq b, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $\leq (a, b)$ ein Element. Man würde vielleicht lieber einfach $\leq$ für dieses Element schreiben, aber dann wären die Morphismenmengen nicht disjunkt. Die Verknüpfung von $\leq (b, c)$ mit $\leq (a, b)$ ist $\leq (a, c)$. Dass es diesen Morphismus gibt, wenn es die ersten beiden gibt, folgt aus der Transitivität der Ordnungsrelation.

Auf diese Art haben wir die erste konkretere Kategorie konstruiert, in der die Morphismen nicht von vorneherein Abbildungen zwischen Mengen sind.

NB: Man kann jetzt den Spieß umdrehen und eine geordnete Menge als eine kleine Kategorie definieren, in der die Morphismenmengen alle leer oder einelementig sind und aus $\mathrm{Mor}(A, B) \neq \emptyset \neq \mathrm{Mor}(B, A)$ folgt, dass $A = B$.

b) Die Kategorie $\underline{Ord}$ hat als Objekte alle geordneten Mengen. Ein Morphismus zwischen zwei geordneten Mengen ist eine ordnungserhaltende Abbildung ($x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$).

1.5 Definition (*Unterkategorie, volle Unterkategorie*)

a) Es sei $\mathcal{K}$ eine Kategorie. Eine *Unterkategorie* $\mathcal{U}$ von $\mathcal{K}$ ist eine Kategorie,

- deren Objekte auch Objekte von $\mathcal{K}$ sind,
- deren Morphismenmengen Teilmengen der zugehörigen Morphismenmengen in $\mathcal{K}$ sind,
- für die mit jedem Objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ auch das Einselement 1_A aus der Kategorie $\mathcal{K}$ ein Morphismus in $\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(A, A)$ ist,

und

- deren Verknüpfungsvorschrift durch Einschränkung der Verknüpfungsvorschrift aus $\mathcal{K}$ entsteht.

b) Eine Unterkategorie heißt *voll*, wenn für alle Objekte A, B von $\mathcal{U}$ gilt:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{U}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B).$$

Dabei markieren wir der Deutlichkeit halber als Index am Namen der Morphismenmengen, in welcher Kategorie wir gerade sind.

1.6 Beispiele (*von Unterkategorien*)

a) Die Kategorie der Körper ist definiert als volle Unterkategorie der Kategorie der Ringe mit Eins: es gibt nichts, was ein Homomorphismus zwischen zwei Körpern zu erfüllen hätte, was nicht jeder Ringhomomorphismus auch tut.

b) Wenn man etwas zu viel Zeit hat und sich auch mit Ringen ohne Eins beschäftigt, dann ist die Kategorie der Ringe mit Eins eine Unterkategorie hiervon. Diese Unterkategorie ist nicht voll, denn zum Beispiel ist die Abbildung $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (x, 0)$ ein Morphismus in der Kategorie aller Ringe, aber nicht in der Kategorie der Ringe mit 1.

Wichtige Qualitäten von Abbildungen sind die der Injektivität und die der Surjektivität. Da Morphismen in beliebigen Kategorien im Allgemeinen keine Abbildungen zwischen zwei Mengen sind, muss man sich Eigenschaften überlegen, die rein kategorientheoretisch etwas ähnliches bedeuten wie Injektivität und Surjektivität in $\underline{Men}$.

1.7 Definition (*Monomorphismen und Epimorphismen*)

Es sei $\mathcal{K}$ eine Kategorie und $\Phi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$. Dann heißt Φ ein *Monomorphismus*, falls gilt:

Für alle Objekte C in $\mathcal{K}$ und alle Morphismen $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathrm{Mor}(C, A)$ folgt aus $\Phi \circ \Psi_1 = \Phi \circ \Psi_2$, dass $\Psi_1 = \Psi_2$.

Φ heißt ein *Epimorphismus*, falls gilt:

Für alle Objekte C in $\mathcal{K}$ und alle Morphismen $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathrm{Mor}(B, C)$ folgt aus $\Psi_1 \circ \Phi = \Psi_2 \circ \Phi$, dass $\Psi_1 = \Psi_2$.

1.8 Beispiel

a) In der Kategorie $\underline{Men}$ sind Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen. Epimorphismen sind genau die surjektiven Abbildungen.

b) In der Kategorie $\underline{Gruppen}$ aller Gruppen ist ein surjektiver Homomorphismus sicher ein Epimorphismus. Die Umkehrung gilt auch.

Wenn nämlich $f : G \longrightarrow H$ ein nicht surjektiver Homomorphismus von Gruppen ist, so sei $B := f(G)$.

Ist der Index von B in H gleich 2, so ist B ein Normalteiler, und für den kanonischen Homomorphismus $\alpha : H \longrightarrow H/B$ und den trivielen Homomorphismus $\beta : H \longrightarrow H/B$ gilt $\alpha \circ f = \beta \circ f$, aber $\alpha \neq \beta$. Daher ist f in diesem Fall kein Epimorphismus.

Ist der Index von B in H mindestens 3, so betrachte den Homomorphismus $\alpha : H \longrightarrow \mathrm{Sym}(H), \ \ (\alpha(h))(\eta) := h\eta$. Wähle weiter $x, y \in H$, sodass B, Bx, By drei verschiedene Nebenklassen sind. Dann wird eine Abbildung $\sigma : H \longrightarrow H$ aus dem Hut gezaubert vermöge

$$\sigma(\eta) := \begin{cases} \eta, & \text{falls } \eta \notin Bx \cup By, \\ by, & \text{falls } \eta = bx, b \in B, \\ bx, & \text{falls } \eta = by, b \in B. \end{cases}$$

Wegen $\sigma^2 = \mathrm{Id}_H$ liegt σ in $\mathrm{Sym}(H)$. Wir defnieren nun $\beta : H \longrightarrow \mathrm{Sym}(H)$ durch $\beta(h) := \sigma^{-1} \circ \alpha(h) \circ \sigma$.

Dann ist β ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt $\alpha(x)(e_H) = x$, $\beta(x)(e_H) = y$. Daher sind α und β verschieden. Trotzdem aber gilt $\alpha \circ f = \beta \circ f$. Daher ist f kein Epimorphismus.

Ein Monomorphismus in der Kategorie aller Gruppen ist dasselbe wie ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Wenn nämlich (und das ist die „schwierigere“ Richtung) $\Phi : H \longrightarrow G$ ein Monomorphismus ist, dann betrachten wir für $C := \mathrm{Kern}(\Phi)$:

$$\Psi_1 : C \longrightarrow H : \ \Psi_1(c) := c, \quad \Psi_2 : C \longrightarrow H, \Psi_2(c) := e_H.$$

Dann ist $\Phi \circ \Psi_1 = \Phi \circ \Psi_2$ die triviale Abbildung von C nach G. Aber aus Monomorphismus folgt dann, dass $\Psi_1 = \Psi_2$, also sind alle $c \in C$ gleich dem neutralen Element, und damit $C = \{e_H\}$. Also ist Φ injektiv.

c) In der Kategorie der Ringe ist die Einbettung $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ ein Monomorphismus und auch ein Epimorphismus, wenn auch nicht surjektiv. Wieso?

d) In der Kategorie aller Gruppen gibt es den Begriff des Unterobjekts. Den gibt es nicht in jeder Kategorie. Zum Beispiel ist eine echte Teilmenge eines Standardvektorraums niemals ein Standardvektorraum, also gibt es in der Kategorie aller Standardvektorräume keine Unterobjekte. Gleichwohl wissen wir aus der Linearen Algebra, dass sich jeder Untervektorraum eines Standardvektorraums als Bild eines Vektorraumhomomorphismus schreiben lässt. Man ersetzt also hier Untervektorräume des K^n durch Monomorphismen von K^d nach K^n und bekommt jedenfalls so etwas ähnliches wie den Begriff eines Unterobjektes.

1.9 Beispiel (*noch ein paar Kategorien*)

a) Es sei X eine Menge. Dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ durch Inklusion geordnet, und wir erhalten eine Kategorie wie in Beispiel 1.4. Jetzt dürfen wir uns den Morphismus $\leq (A, B)$ als die Inklusion von A nach B vorstellen, wenn $A \subseteq B$. Ansonsten gibt es ja keine Morphismen.

b) Die Struktur eines *topologischen Raumes* auf X wird vorgegeben durch Auszeichnung einer vollen Unterkategorie $\mathcal{T}(X)$ von $\mathcal{P}(X)$, die $\emptyset$ und X als Objekte enthält und deren Objektemenge (als Unterkategorie von $\mathcal{P}(X)$ ist der topologische Raum natürlich eine kleine Kategorie) unter Bildung endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen stabil ist.

$\mathcal{T}(X)$ heißt das System der offenen Mengen (der Topologie von X). Man kann die meisten Räume mit sehr vielen verschiedenen Topologien versehen.

So ist etwa die volle Unterkategorie von $\mathcal{P}((0,1))$, die aus allen offenen Teilmengen des offenen Einheitsintervalls $(0,1)$ besteht, eine Topologie auf $(0,1)$, die Standardtopologie aus der Analysis. Aber auch die Unterkategorie, die nur aus $\emptyset$ und $(0,1)$ besteht, oder die, die aus $\emptyset$ und den Komplementen endlicher Mengen besteht sind Topologien auf $(0,1)$.

Bitte fragen Sie sich hier, wieso ich das so kompliziert aufschreibe. Eigentlich interessiert man sich gar nicht für die Morphismen dieser Kategorie, beziehungsweise sind sie so naheliegend, dass man sich das Leben gerne erleichtern würde. Der Grund ist, dass man auf diese Art schon ein wenig sieht, wie sich der Begriff einer Topologie verallgemeinern lässt. Eine wichtige Verallgemeinerung dieses Begriffs findet sich im Begriff des *Situs*. Hier zeichnet man nicht von vorneherein die Teilmengen von X aus und benutzt Inklusionen, sondern man lässt als Objekte der Kategorie eine größere (von Fall zu Fall zu umreißende) Klasse von Abbildungen $Y \longrightarrow X$ zu, von der man eben irgendwie eine analoge Forderung wie „Abgeschlossenheit unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen" kategorientheoretisch formulieren muss. Diese Sichtweise von Topologien ist aus der modernen algebraischen (oder arithmetischen) Geometrie nicht wegzudenken.

Um nicht auf halbem Wege stehen zu bleiben definieren wir noch, was eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen X und Y ist. Es ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, für die das Urbild jeder offenen Teilmenge von Y in X offen ist.

Die topologischen Räume bilden – mit stetigen Abbildungen als Morphismen – eine Kategorie $\underline{Top}$.

2. Funktoren

Bei den Beispielen für Unterkategorien ist nicht das folgende aufgetaucht: die Kategorie der Ringe (ab jetzt wieder immer mit Eins) als Unterkategorie der Kategorie der Gruppen. Das liegt einfach daran, dass das keine Unterkategorie ist, denn es gibt ja in aller Regel wenn überhaupt dann mehr als eine Möglichkeit, aus einer abelschen Gruppe durch Definition der Multiplikation einen Ring zu machen. Trotzdem kann man jedem Ring seine additive Gruppe zuordnen und erhält dabei aus jedem Ring eine abelsche Gruppe. Ein Ringhomomorphismus lässt sich auch immer auffassen als Homomorphismus zwischen den additiven Gruppen. Dabei sind wir von einer Kategorie in eine andere gekommen. Dieser Sachverhalt wird verallgemeinert durch das Konzept des Funktors.

2.1 Definition (*Funktor*)

Es seien $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ zwei Kategorien. Ein *kovarianter Funktor* $\mathcal{F}$ von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$ besteht aus der Vorgabe einer Zuordnung, die jedem Objekt A aus $\mathcal{K}$ ein Objekt $\mathcal{F}(A)$ in $\mathcal{L}$ zuordnet und der Vorgabe einer Abbildung

$$\mathcal{F}_{A,B} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

für je zwei Objekte A, B in $\mathcal{K}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}) : \mathcal{F}_{A,A}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$.
- $\forall A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}), \forall \Phi \in \mathrm{Mor}(A,B), \Psi \in \mathrm{Mor}(B,C) : \mathcal{F}_{A,C}(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{F}_{B,C}(\Psi) \circ \mathcal{F}_{A,B}(\Phi)$.

Analog gibt es einen *kontravarianten* Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$. Dieser ordnet auch Objekten von $\mathcal{K}$ Objekte von $\mathcal{L}$ zu, aber dreht bei den Morphismen die Richtung um:

$$\mathcal{F}_{A,B}(\Phi) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A)).$$

Man muss dann auch die Reihenfolge bei der zweiten Bedingung umdrehen.

Aus Bequemlichkeit lässt man die Indizes $_{A,B}$ im Allgemeinen weg.

2.2 Beispiel (*Vergissfunktoren, Dualraum, Hom-Funktoren, Einheitengruppe, freie Moduln*)

a) Es seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann ist M immer auch eine Menge, und indem man einem Modul ihn selbst zuordnet und die Menge aller Modulhomomorphismen als Teilmenge der Menge aller Abbildungen zwischen zwei Moduln auffasst, hat man einen kovarianten Funktor von $\underline{R-Mod}$ nach $\underline{Men}$ definiert.

Solche und ähnliche Funktoren, die durch „Vergessen" von Strukturen zustande kommen, nennt man Vergissfunktoren. Auch der eingangs beschriebene Funktor von $\underline{Ringe}$ nach $\underline{Gruppen}$ ist solch ein Vergissfunktor.

b) Nun betrachten wir die Kategorie $\underline{K-Mod}$ aller K-Vektorräume. Zu jedem K-Vektorraum V gibt es den Dualraum $V^* := \mathrm{Mor}_{\underline{K-Mod}}(V,K)$, und zu jedem K-Vektorraumhomomorphismus $\Phi : V \longrightarrow W$ gibt es den dualen Homomorphismus

$$\Phi^* : W^* \longrightarrow V^*,\ \lambda \mapsto \lambda \circ \Phi.$$

Auf diese Weise hat man einen kontravarianten Funktor * von der Kategorie der K-Vektorräume in sich selbst definiert.

c) Das Beispiel b) lässt sich leicht modifiziert verallgemeinern. Ist $\mathcal{K}$ eine beliebige Kategorie und A ein Objekt von $\mathcal{K}$, so bekommt man zwei Funktoren von $\mathcal{K}$ nach $\underline{Men}$, nämlich einerseits

$$\mathrm{Mor}(-,A) : \begin{cases} X & \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(X,A), \\ \mathrm{Mor}(X,Y) \ni \Phi & \rightsquigarrow [\mathrm{Mor}(Y,A) \ni \Psi \mapsto \Psi \circ \Phi \in \mathrm{Mor}(X,A)], \end{cases}$$

das ist kontravariant, und andererseits

$$\mathrm{Mor}(A,-) : \begin{cases} X & \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(A,X), \\ \mathrm{Mor}(X,Y) \ni \Phi & \rightsquigarrow [\mathrm{Mor}(A,X) \ni \Psi \mapsto \Phi \circ \Psi \in \mathrm{Mor}(A,Y)], \end{cases}$$

das ist kovariant.

Solche Funktoren heißen *Hom-Funktoren.* Man sollte dabei daran erinnern, dass Morphismen oft auch Homomorphismen genannt und mit $\mathrm{Hom}(A,B)$ notiert werden.

d) Einen wunderschönen Funktor von $\underline{Ringe}$ nach $\underline{Gruppen}$ erhält man, indem man einem Ring seine Einheitengruppe zuordnet. Dabei ordnen wir einem Homomorphismus $\Phi : R \longrightarrow S$ zwischen Ringen seine Einschränkung auf $R^\times$ zu, die bekanntlich Werte in $S^\times$ annimmt.

e) Als letztes Beispiel betrachten wir für einen festen Ring $R \neq \{0\}$ die Zuordnung, die einer Menge X den freien R-Modul mit Basis X zuordnet. Etwas präziser (wieso sollte X überhaupt in so einem Modul liegen?) nehmen wir den Funktor

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \underline{Men} & \rightsquigarrow \underline{R-Mod}, \\ X & \rightsquigarrow \mathrm{Abb}(X,R)_0, \\ \mathrm{Abb}(X,Y) \ni \Phi & \rightsquigarrow [f \mapsto [y \mapsto \sum_{x:\Phi(x)=y} f(x)]]. \end{cases}$$

Dabei ist $\mathrm{Abb}(X,R)_0$ der R-Modul aller Abbildungen von X nach R mit endlichem Träger, was auch dafür sorgt, dass die Summe in der Definition endlich ist. Die Funktionen δ_{x_0}, die nur an einer Stelle $x_0 \in X$ den Wert 1 annehmen und sonst den Wert 0, bilden eine Basis von $\mathrm{Abb}(X,R)_0$, die mit X identifiziert wird. Der Homomorphismus $\mathcal{F}(\Phi)$ zu $\Phi : X \longrightarrow Y$ ist der, der durch lineare Fortsetzung der durch Φ induzierten Abbildung zwischen den Basen gehört.

Wir haben hier eine nette Eigenschaft, die zwei Funktoren miteinander verbindet. Wir kennen ja auch den Vergissfunktor $\mathcal{V}$, der einem R-Modul einfach die zugrunde liegende Menge zuordnet. Wir finden nun die folgende Formulierung des Satzes von der linearen Fortsetzung:

$$\mathrm{Mor}_{\underline{Men}}(X, \mathcal{V}(M)) \simeq \mathrm{Mor}_{\underline{R-Mod}}(\mathcal{F}(X), M).$$

Dabei ist X eine beliebige Menge, und M ein beliebiger R-Modul.

Auf diesen Zusammenhang zwischen zwei Funktoren werden wir noch eingehen.

2.3 Bemerkung (*Wieso Funktoren?*)

Wie die Beispiele vielleicht schon gezeigt haben lässt es sich gar nicht vermeiden, mit Funktoren und Kategorien in Berührung zu kommen, auch wenn man natürlich alles ad hoc machen kann, ohne die abstrakte Sprache der Kategorien einzuführen.

Eine wesentliche Eigenschaft von Funktoren ist es, dass sie Isomorphismen in Isomorphismen überführen. Dies rechnet man ohne Weiteres mit den Eigenschaften aus Definition 2.1 nach. Es führt dazu, dass man vielleicht zeigen kann, dass zwei Objekte einer Kategorie $\mathcal{K}$ nicht isomorph sind, indem man ihre Bilder unter einem geeigneten Funktor als nicht isomorph ausweist. Dies ist eine der Lieblingsanwendungen der Kategorientheorie in der Topologie. Die Frage, wann zwei topologische Räume isomorph sind (man sagt dann: homöomorph), ist sehr schwer zu beantworten, denn Topologie ist intrinsisch schwabbelig. Es gibt allerdings Funktoren in etwas rigidere Kategorien (Fundamentalgruppe, Kohomologiering), in denen Isomorphie leichter zu widerlegen ist.

Natürlich ist es nicht hinreichend, die Isomorphie zweier Objekte durch Untersuchung ihrer Bilder unter einem Funktor zu testen. Ein prominentes Beispiel, wo man so etwas untersucht und auch sieht, wie schwer diese Frage werden kann, ist die Poincaré-Vermutung.

Aufgabe: Finden Sie die triviale Kategorie, zu der es von jeder anderen Kategorie aus genau einen Funktor gibt.

2.4 Definition (*natürliche Transformationen*)

Nun seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ zwei Kategorien und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ zwei kovariante Funktoren von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$. Eine *natürliche Transformation* η von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$ besteht aus der Vorgabe von Morphismen $\eta_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{G}(A))$, sodass das folgende Diagramm für beliebige Objekte $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, B)$ kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccccc} A & \qquad & \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{G}(A) \\ f\downarrow & & \mathcal{F}(f)\downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ B & & \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

Mit anderen Worten: $\eta_B \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \eta_A$.

Wenn noch dazu jedes η_A ein Isomorphismus ist, dann ist η ein *natürlicher Isomorphismus* von Funktoren.

2.5 Beispiel (*Bidual, und noch ein anderes Beispiel*)

a) In Beispiel 2.2 b) hatten wir den kontravarianten Funktor * (Dualraum) von der Kategorie der K-Vektorräume in sich selbst. Diesen können wir zweimal ausführen und erhalten den kovarianten Funktor $V \rightsquigarrow V^{**}$.

Nun ist aus der Linearen Algebra bekannt, dass es einen natürlichen Homomorphismus von V nach V^{**} gibt, nämlich denjenigen, der $v \in V$ auf die Abbildung $\eta_V(v) = [V^* \ni \lambda \mapsto \lambda(v) \in K]$ schickt. Diese Abbildungen η_V definieren eine natürliche Transformation vom identischen Funktor zum Funktor **. Wenn man sich auf die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume einschränkt, so bekommt man sogar einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren.

b) Auf der Kategorie der Gruppen betrachten wir den Funktor $\mathcal{A}$, der einer Gruppe G den maximalen abelschen Quotienten $\mathcal{A}(G) := G/G'$ zuordnet. Dabei ist G' die Kommutatoruntergruppe, also die Untergruppe, die von den Elementen $ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugt wird. Jeder Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ bildet G' nach H' ab, wir erhalten also eine induzierte Abbildung $\mathcal{A}(\Phi) : G/G' \longrightarrow H/H'$.

Wenn nun $\pi_G : G \longrightarrow G/G'$ die natürliche Projektion ist, dann ist π eine natürliche Transformation von dem identischen Funktor zum Funktor $\mathcal{A}$. Das folgt aus dem Homomorphiesatz für Gruppen, oder besser gesagt: es liegt der Konstruktion von $\mathcal{A}(\Phi)$ zu Grunde.

2.6 Definition (*Treue, Volltreue, Äquivalenz*)

Es sei $\mathcal{F}$ ein Funktor von der Kategorie $\mathcal{K}$ zur Kategorie $\mathcal{L}$.

a) Der Funktor $\mathcal{F}$ heißt *treu*, wenn für jedes Paar A, B von Objekten von $\mathcal{K}$ die Zuordnung

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A},\mathcal{B}} : \mathrm{Mor}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(\mathcal{A}), \mathcal{F}(\mathcal{B}))$$

injektiv ist. Wenn diese Abbildung stets surjektiv ist, heißt $\mathcal{F}$ *voll*. Wenn sie eine Bijektion ist, heißt $\mathcal{F}$ *volltreu*.

b) Der Funktor $\mathcal{F}$ definiert eine *Äquivalenz* zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$, wenn es einen Funktor $\mathcal{G}$ von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ gibt, sodass $\mathcal{FG}$ natürlich isomorph zur Identität auf $\mathcal{L}$ ist und $\mathcal{GF}$ natürlich isomorph zur Identität auf $\mathcal{K}$.

Vorsicht: $\mathcal{G}$ ist im Allgemeinen nicht eindeutig durch $\mathcal{F}$ festgelegt.

2.7 Beispiel

Die Kategorie der nulldimensionalen K-Vektorräume ist äquivalent zur Kategorie des Nullraums. Aber die beiden Kategorien sind nicht isomorph im naheliegenden Sinne, denn die eine ist klein und die andere nicht.

2.8 Proposition (*Kriterium für Äquivalenz*)

Es sei $\mathcal{F}$ ein Funktor zwischen den Kategorien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$. Dann sind gleichbedeutend:

i) $\mathcal{F}$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien.

ii) $\mathcal{F}$ ist volltreu und für jedes Objekt C in $\mathcal{L}$ gibt es ein Objekt A in $\mathcal{K}$, sodass $\mathcal{F}(A)$ zu C isomorph ist.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii) Wir wählen einen Funktor $\mathcal{G}$ wie in der Definition 2.6. Da $\mathcal{GF}$ natürlich isomorph zur Identität auf $\mathcal{K}$ ist, wählen wir einen natürlichen Isomorphismus η von der Identität zu $\mathcal{GF}$, d.h. für alle Morphismen $f : A \to B$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A & & A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{GF}(A) \\ f\downarrow & & f\downarrow & & \downarrow \mathcal{GF}(f) \\ B & & B & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{GF}(B) \end{array}$$

Da die Morphismen η_A und η_B Isomorphismen sind, liefert dies eine Bijektion

$$\mathrm{Mor}(A,B) \ni f \mapsto \eta_B \circ f \circ \eta_A^{-1} \in \mathrm{Mor}(\mathcal{GF}(A), \mathcal{GF}(B)).$$

Diese Bijektion ist aber gerade das, was der Funktor $\mathcal{GF}$ mit den Morphismen macht, und das faktorisiert als

$$\mathrm{Mor}(A,B) \ni f \mapsto \mathcal{F}(f) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B)) \ni g \mapsto \mathcal{G}(g) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{GF}(A), \mathcal{GF}(B)).$$

Damit ist $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ injektiv und (wegen der analogen Überlegung für $\mathcal{FG}$ statt $\mathcal{GF}$) ist es auch surjektiv, zumindest für alle Objekte im Bildbereich von $\mathcal{G}$. Da aber jedes Objekt A zum Objekt $\mathcal{GF}(A)$ isomorph ist (via η_A), ist die Abbildung für je zwei Objekte surjektiv.

Da auch $\mathcal{FG}$ zur Identität auf $\mathcal{L}$ isomorph ist, ist ein Objekt C isomorph zu $\mathcal{FG}(C)$, also zu $\mathcal{F}(\mathcal{G}(C))$.

ii) $\Rightarrow$ i) Nun nehmen wir an, $\mathcal{F}$ sei volltreu und zu jedem Objekt C von $\mathcal{L}$ gebe es ein Objekt A von $\mathcal{K}$, sodass $\mathcal{F}(A)$ zu C isomorph ist. Wir wählen so ein A aus und nennen es $\mathcal{G}(C)$. Weiter wählen wir einen Isomorphismus $\xi_C \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(C, \mathcal{F}(\mathcal{G}(C)))$.

Wenn D ein weiteres Objekt in $\mathcal{L}$ ist und Φ ein Morphismus von C nach D, dann betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}l} C & \xrightarrow{\xi_C} & \mathcal{FG}(C) & A = \mathcal{G}(C) \\ \Phi\downarrow & & \downarrow \xi_D \circ \Phi \circ \xi_C^{-1} & \downarrow \mathcal{G}(\Phi) \\ D & \xrightarrow{\xi_D} & \mathcal{FG}(D) & B = \mathcal{G}(D) \end{array}$$

Hierbei ist $\mathcal{G}(\Phi)$ der eindeutig bestimmte ($\mathcal{F}$ ist ja volltreu!) Morphismus von A nach B mit $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\Phi)) = \xi_D \circ \Phi \circ \xi_C^{-1}$.

Damit ist ein Funktor $\mathcal{G}$ von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ definiert (nachrechnen!). $\mathcal{G}$ ist so konstruiert, dass die Identität auf $\mathcal{L}$ zum Funktor $\mathcal{FG}$ natürlich isomorph ist. Um dies zu verifizieren verwende man die Morphismen ξ_C.

Nun ist noch zu zeigen, dass auch $\mathcal{GF}$ zur Identität auf $\mathcal{K}$ natürlich isomorph ist.

Es sei A ein Objekt von $\mathcal{K}$. Dann haben wir aus der Konstruktion von $\mathcal{G}$ den Morphismus

$$\xi_{\mathcal{F}(A)} : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{FGF}(A).$$

Da $\mathcal{F}$ volltreu ist, gibt es genau einen Morphismus

$$\eta_A \in \mathrm{Mor}(A, \mathcal{GF}(A)),$$

der unter $\mathcal{F}(A)$ auf $\xi_{\mathcal{F}(A)}$ abgebildet wird. Es ist klar (hier braucht man noch einmal die Volltreue von $\mathcal{F}$), dass η_A ein Isomorphismus ist.

Wenn nun $\Phi : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{K}$ ist, dann gilt nach Konstruktion von $\mathcal{G}$ für den Morphismus $\mathcal{F}(\Phi)$ die folgende Regel:

$$\mathcal{FGF}(\Phi) \circ \xi_{\mathcal{F}(A)} = \xi_{\mathcal{F}(B)} \circ \mathcal{F}(\Phi).$$

Da hier $\xi_{\mathcal{F}(A)} = \mathcal{F}(\eta_A)$ gilt und $\mathcal{F}$ volltreu ist, führt dies auf

$$\mathcal{GF}(\Phi) \circ \eta_A = \eta_B \circ \Phi.$$

Damit ist η ein natürlicher Isomorphismus von der Identität zu $\mathcal{GF}$. ○

2.9 Anwendung (*aus groß mach klein*)

Es sei $\mathcal{L}$ eine volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{K}$, die für jedes Objekt A aus $\mathcal{K}$ mindestens eines enthält, das zu A isomorph ist. Dann ist die Inklusion von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$ eine natürliche Äquivalenz von Kategorien.

So ist zum Beispiel die Kategorie aller endlichdimensionalen Vektorräume natürlich äquivalent zur Kategorie der endlich dimensionalen Standardvektorräume: man muss sich nicht mit so vielen Objekten herumschlagen.

Insbesondere kann oft – zum Beispiel im eben angeführten Beispiel – eine Kategorie durch eine äquivalente kleine Unterkategorie ersetzt werden, nämlich genau dann, wenn es eine Menge von Objekten gibt, die zu jedem Objekt ein isomorphes enthält.

Ein besonderes Augenmerk gilt bei Funktoren in die Kategorie $\underline{Men}$ den Hom-Funktoren aus Beispiel 2.2. Wir behandeln zunächst das weitberühmte

2.10 Yoneda-Lemma (*natürliche Transformationen von einem Funktor in einen Hom-Funktor*)

Es sei $\mathcal{F}$ ein kovarianter Funktor von der Kategorie $\mathcal{K}$ in die Kategorie $\underline{Men}$. Weiter sei A ein Objekt von $\mathcal{K}$ und $h \in \mathcal{F}(A)$. Für ein Objekt B von $\mathcal{K}$ sei η_B die Abbildung

$$\eta_B : \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathcal{F}(B), \quad \Phi \mapsto (\mathcal{F}(\Phi))(h).$$

Dann ist $B \rightsquigarrow \eta_B$ eine natürliche Transformation η vom Hom-Funktor $\mathrm{Mor}(A, -)$ zum Funktor $\mathcal{F}$.

Die Zuordnung $h \mapsto \eta$ ist eine Bijektion der Menge $\mathcal{F}(A)$ mit der Menge aller natürlichen Transformationen von $\mathrm{Mor}(A, -)$ zum Funktor $\mathcal{F}$. Die Umkehrung wird durch

$$\eta \mapsto \eta_A(1_A)$$

gegeben.

Beweis. Es seien B, C Objekte in $\mathcal{K}$ und Φ ein Morphismus von B nach C. Dann haben wir für $\Psi \in \mathrm{Mor}(A, B)$:

$$(\mathcal{F}(\Phi) \circ \eta_B)(\Psi) = \mathcal{F}(\Phi)(\mathcal{F}(\Psi)(h)) = \mathcal{F}(\Phi \circ \Psi)(h) = \eta_C(\Phi \circ \Psi).$$

Das zeigt die Gleichung

$$\mathcal{F}(\Phi) \circ \eta_B = \eta_C \circ \mathrm{Mor}(A, -)(\Phi),$$

und damit ist η tatsächlich eine natürliche Transformation der gewünschten Art.

Die Gleichung

$$h = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(A)}(h) = (\mathcal{F}(1_A))(h) = \eta_A(1_A)$$

zeigt, dass h sich aus η zurückgewinnen lässt, dass also die Zuordnung $h \rightsquigarrow \eta$ injektiv ist. Außerdem legt dies nahe, wie der Übergang von h zu η zu invertieren ist:

Wenn η eine beliebige Transformation vom Hom-Funktor zu $\mathcal{F}$ ist, so setze $h := \eta_A(1_A)$. Dann ist nachzuweisen, dass η die durch h definierte natürliche Transformation ist. Also sei $\Phi \in \mathrm{Mor}(A, B)$.

Wir betrachten das zur natürlichen Transformation gehörende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}(A,A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{F}(A) \\ M(\Phi)\downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(\Phi) \\ \mathrm{Mor}(A,B) & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{F}(B) \end{array}$$

Dabei steht $M(\Phi)$ für den Morphismus, der aus Φ unter dem Hom-Funktor wird, also die Komposition mit Φ.

Wir werten das Diagramm aus für die Identität $1_A \in \mathrm{Mor}(A,A)$ und erhalten

$$\eta_B(\Phi) = \eta_B(\Phi \circ 1_A) = (\eta_B \circ M_\Phi)(1_A) = \mathcal{F}(\Phi)(\eta_A(1_A)) = \mathcal{F}(\Phi)(h).$$

Also ist η die durch h definierte natürliche Transformation. ○

2.11 Definition/Bemerkung

Ein kovarianter Funktor $\mathcal{F}$ von $\mathcal{K}$ nach $\underline{Men}$ heißt *darstellbar*, wenn es ein Objekt A von $\mathcal{K}$ gibt, sodass $\mathcal{F}$ zum Hom-Funktor $\mathrm{Mor}(A,-)$ natürlich isomorph ist.

Es ist klar, dass die Hom-Funktoren $\mathrm{Mor}(A,-)$ und $\mathrm{Mor}(B,-)$ sicher dann natürlich äquivalent sind, wenn A und B zueinander isomorph sind. Auch die Umkehrung gilt. Wenn nämlich η eine natürliche Äquivalenz dieser beiden Morphismen ist, so werten wir das letzte Diagramm aus dem Beweis für $\mathcal{F}(A) := \mathrm{Mor}(B,A)$ aus bei $\Phi = \eta_B^{-1}(1_B)$ und erhalten

$$1_B = \eta_B(\eta_B^{-1}(1_B)) = \eta_B^{-1}(1_B) \circ \eta_A(1_A)$$

und analog

$$1_A = \eta_A(1_A) \circ \eta_B^{-1}(1_B),$$

also sind A und B isomorph.

Ähnliche Definitionen und Sachverhalte hat man auch für kontravariante Funktoren, die man selbstverständlich mit den Funktoren $\mathrm{Mor}(-,A)$ vergleicht.

2.12 Definition/Bemerkung (*adjungierte Funktoren*)

a) Es seien $\mathcal{F}$ eine Funktor von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{L}$ und $\mathcal{G}$ eine Funktor von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}$.

Dann heißt $\mathcal{G}$ *linksadjugiert* zu $\mathcal{F}$ (und $\mathcal{F}$ heißt *rechtsadjungiert* zu $\mathcal{G}$), wenn für jedes Paar (A,B) von Objekten in $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ eine Bijektion

$$\eta_{A,B} : \mathrm{Mor}(B, \mathcal{F}(A)) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{G}(B), A)$$

gibt, die für festes A einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Homfunktoren $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}(-),A)$ und $\mathrm{Mor}(-,\mathcal{F}(A))$ vermittelt, sowie für festes B einen natürlichen Isomorphismus der Funktoren $\mathrm{Mor}(\mathcal{G}(B),-)$ und $\mathrm{Mor}(B,\mathcal{F}(-))$.

b) Dies ist genau der Sachverhalt (nur etwas präziser), den wir in Beispiel 2.2.e) als Zusammenhang zwischen dem dortigen Vergissfunktor $\mathcal{V}$ und dem Bilden $\mathcal{F}$ des freien Moduls gesehen haben.

Um zu zeigen, dass es so etwas noch öfters gibt, machen wir noch ein Beispiel. Wir betrachten den Funktor aus Beispiel 2.2.d), der einem Ring seine Einheitengruppe zuordnet. Nennen wir diesen Funktor $\mathcal{E}$.

Umgekehrt brauchen wir einen Funktor, der einer Gruppe einen Ring zuordnet. Dies leistet der Gruppenring über $\mathbb{Z}$. Es sei also für eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe G der Ring $\mathcal{R}(G)$ definiert als der Gruppenring

$$\mathbb{Z}[G] := \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z},\ \text{nur endlich viele } a_g \neq 0\}.$$

Die Multiplikation ist definiert durch

$$(\sum_{g\in G} a_g \cdot g) \cdot (\sum_{h\in G} b_h \cdot h) := \sum_{g\in G} \left(\sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g} \right) \cdot g.$$

Ein Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ setzt sich linear zu einem Ringhomomorphismus $\mathcal{R}(\Phi) : \mathcal{R}(G) \longrightarrow \mathcal{R}(H)$ fort, und damit ist $\mathcal{R}$ ein Funktor.

Ein Homomorphismus von diesem Gruppenring in einen anderen Ring ist eindeutig dadurch festgelegt, was mit der Gruppe G passiert (die als Untergruppe in der Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[G]$ sitzt). Die lineare Fortsetzung

$$\eta_{R,G} : \mathrm{Mor}_{\underline{Gruppen}}(G, \mathcal{E}(R)) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\underline{Ringe}}(\mathcal{R}(G), R)$$

zeigt dann, dass $\mathcal{R}$ linksadjungiert zu $\mathcal{E}$ ist.

3. Universelle Eigenschaften

3.1 Definition (*universelle Abbildungseigenschaft*)

a) Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ ein kovarianter Funktor. Weiter seien C ein Objekt in $\mathcal{L}$, A ein Objekt in $\mathcal{K}$ und $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(C, \mathcal{F}(A))$. Dann erfüllt (A, φ) die *universelle Abbildungseigenschaft* bezüglich C und $\mathcal{F}$, falls für jedes Objekt B von $\mathcal{K}$ und jeden Morphismus $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(C, \mathcal{F}(B))$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Psi \in \mathrm{Mor}(A, B)$ existiert, sodass

$$\mathcal{F}(\Psi) \circ \varphi = \psi.$$

Das folgende Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}(A) \\ \| & & \downarrow \mathcal{F}(\Psi) \\ C & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}(B) \end{array}$$

b) Wenn es ein Paar A, φ gibt, das bezüglich C und $\mathcal{F}$ die universelle Abbildungseigenschaft hat, dann ist dies bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus eindeutig bestimmt (toll, nicht wahr?).

Hat nämlich auch (B, ψ) die universelle Abbildungseigenschaft, so gibt es ein Ψ mit $\mathcal{F}(\Psi) \circ \varphi = \psi$ und analog ein Φ mit $\mathcal{F}(\Phi) \circ \psi = \varphi$,

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}(A) \\ \| & & \mathcal{F}(\Phi) \uparrow\downarrow \mathcal{F}(\Psi) \\ C & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}(B) \end{array}$$

und wir finden insbesondere

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}(A) \\ \| & & \downarrow \mathcal{F}(\Phi \circ \Psi) \\ C & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}(A) \end{array}$$

Da aber $\Phi \circ \Psi$ durch dieses Diagramm eindeutig bestimmt ist und die Identität von A sicher an dieser Stelle in das Diagramm passt, folgt

$$\Phi \circ \Psi = 1_A.$$

Genauso ist $\Psi \circ \Phi = 1_B$, und wir sehen, dass Φ und Ψ zueinander inverse Isomorphismen sind. Insbesondere sagt die universelle Abbildungseigenschaft, dass Φ eindeutig bestimmt ist.

c) Der Name universelle Abbildungseigenschaft kommt natürlich daher, dass man es bei Morphismen oft mit Abbildungen zu tun hat.

3.2 Beispiel (*alte Bekannte*)

a) Wir betrachten noch einmal den Vergissfunktor $\mathcal{V} : \underline{Ringe} \rightsquigarrow \underline{Gruppen}$, der einem Ring R seine Einheitengruppe $R^\times$ zuordnet. Es sei G eine Gruppe.

Gibt es ein Paar (R, φ) bestehend aus einem Ring R und einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \longrightarrow R^\times$, das bezüglich $\mathcal{V}$ die universelle Abbildungseigenschaft hat?

Ja, nämlich den Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ mit der Standardeinbettung $G \longrightarrow (\mathbb{Z}[G])^\times$.

b) Genauso kennen wir für einen Körper K und eine Menge M einen Vektorraum V mit einer Abbildung $M \longrightarrow V$, die bezüglich des Vergissfunktors $\underline{K - Mod} \rightsquigarrow \underline{Men}$ die universelle Abbildungseigenschaft hat: $V = \mathrm{Abb}(M, K)_0, \phi(m) := \delta_m$.

Als leichte Variante benötigen wir noch die folgende Definition.

3.3 Definition (*universelles Element*)

a) Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{K} \rightsquigarrow \underline{Men}$ ein kovarianter mengenwertiger Funktor. Ein *universelles Element* für $\mathcal{F}$ ist ein Paar (A, e) mit $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})$ und $e \in \mathcal{F}(A)$, sodass für jedes Objekt B von $\mathcal{K}$ und jedes $x \in \mathcal{F}(B)$ genau ein Morphismus $\Phi : A \longrightarrow B$ existiert mit

$$x = (\mathcal{F}(\Phi))(e).$$

Diese Eigenschaft nennt man wieder die universelle Abbildungseigenschaft von e, insbesondere dann, wenn der Funktor $\mathcal{F}$ Mengen von Abbildungen als Werte annimmt.

b) Wieder ist das universelle Element bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus wohldefiniert.

3.4 Bemerkung (*Auftritt Yoneda*)

a) Die Definition des universellen Elements ist gerade so gemacht, dass die Abbildungen

$$\eta_B : \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathcal{F}(B), \quad \Phi \mapsto \mathcal{F}(\Phi)(e),$$

einen natürlichen Isomorphismus von Funktoren von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, -)$ und $\mathcal{F}$ liefern. Es gibt also – nach Yoneda – genau dann ein universelles Element, wenn die Funktoren natürlich isomorph sind.

b) Dies kann man jetzt noch einmal benutzen, um zwei Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$ daraufhin zu untersuchen, ob sie zueinander adjungiert sind. Damit $\mathcal{F}$ linksadjungiert zu $\mathcal{G}$ ist, muss es ja Bijektionen

$$\eta_{B,A} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, \mathcal{G}(B)) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), B)$$

mit den Eigenschaften aus Definition 2.12 geben. Das heißt nach Yoneda, dass es für jedes Objekt A von $\mathcal{K}$ einen Morphismus $e_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, \mathcal{GF}(A))$ gibt und für jedes Objekt B von $\mathcal{L}$ einen Morphismus $f_B \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{FG}(B), B)$ gibt, sodass (mit diesen festen Wahlen von e_A unf f_B) die Abbildung

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), B) \ni \Phi \mapsto \mathcal{G}(\Phi) \circ e_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, \mathcal{G}(B))$$

stets eine Bijektion ist, deren Umkehrabbildung durch

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A, \mathcal{G}(B)) \ni \Psi \mapsto f_B \circ \mathcal{F}(\Psi) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), B)$$

gegeben ist.

Die Definition der Elemente e_A bzw. f_B liegt oft nahe; das hängt sicher – um nicht zu sagen: natürlich – von den Funktoren ab. Wenn man schon um die Bijektivität der einen Abbilung weiß (zum Beispiel, weil man eine universelle Abbildungseigenschaft überprüft hat), dann muss man nur noch die einseitige Umkehrabbildung überprüfen. Zum Beispiel langt es dann zu testen, ob

$$\forall A, B : \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), B) \ni \Phi \mapsto f_B \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(\Phi) \circ e_A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(\mathcal{F}(A), B)$$

die Identität ist. Da aber sicher dadurch für festes A eine natürliche Transformation des Hom-Funktors $\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}(A), -)$ zu sich selber vorliegt (es werden ja zwei natürliche Transformationen komponiert) muss nach Yoneda wieder nur getestet werden, ob diese Abbildungen für $B = \mathcal{F}(A)$ die Identität auf sich selbst abbildet.

Fazit: wenn die durch $(e_A)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K})}$ gegebenen natürlichen Transformationen stets natürliche Isomorphismen von Funktoren sind, dann verifizieren die natürlichen Transformationen, die durch Wahl von $(f_B)_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{L})}$ gegeben werden, genau dann die Adjungiertheit von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, wenn für jedes Objekt A von $\mathcal{K}$ gilt:

$$f_{\mathcal{F}(A)} \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}(1_{\mathcal{F}(A)}) \circ e_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}.$$

Da hierbei $\mathcal{G}(1_{\mathcal{F}(A)})$ die Identität auf $\mathcal{GF}(A)$ ist, bedeutet das:

$$f_{\mathcal{F}(A)} \circ \mathcal{F}(e_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$$

3.5 Beispiel (*für universelle Elemente: direktes Produkt, direkte Summe*)

a) Es seien R ein Ring, und M, N seien R-Moduln. Wir betrachten den Funktor

$$\mathcal{F} : \underline{R - Mod} \rightsquigarrow \underline{Men}, X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(M, X) \times \mathrm{Hom}(N, X).$$

Einem Morphismus $\Phi : X \longrightarrow Y$ wird unter $\mathcal{F}$ die Komposition mit Φ zugeordnet, die eine Abbildung

$$\mathrm{Hom}(M, X) \times \mathrm{Hom}(N, X) \ni (\alpha, \beta) \mapsto (\Phi \circ \alpha, \Phi \circ \beta) \in \mathrm{Hom}(M, Y) \times \mathrm{Hom}(N, Y)$$

liefert.

Gesucht ist dann ein universelles Element für diesen Funktor. Dieses findet sich in der direkten Summe $M \times N$ (mit gliedweiser Addition und skalarer Multiplikation) mit dem offensichtlichen Paar

$$(\alpha, \beta) \in \mathrm{Hom}(M, M \times N) \times \mathrm{Hom}(N, M \times N).$$

Wir notieren noch das dazugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccl} {\scriptstyle M \atop N} & {\longrightarrow \atop \longrightarrow} & M \times N \\ \| & & \downarrow {\scriptstyle (m,n) \mapsto \alpha(m)+\beta(n)} \\ {\scriptstyle M \atop N} & {\xrightarrow{\alpha} \atop \xrightarrow[\beta]{}} & Y \end{array}$$

In der Kategorie aller Gruppen geht das nicht so, da wird die Konstruktion der direkten Summe (siehe 3.6 für die Definition) komplizierter.

b) Etwas ähnliches möchte man nun auch für kontravariante Funktoren machen.

Dann „drehen sich die Pfeile um“. Genauer seien M, N zwei R-Moduln wie in Beispiel a). Betrachte

$$\mathcal{G} : \underline{R - Mod} \rightsquigarrow \underline{Men}, X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X, M) \times \mathrm{Hom}(X, N).$$

Dies ist kontravariant, aus $\Phi : X \longrightarrow Y$ wird

$$\mathrm{Hom}(Y, M) \times \mathrm{Hom}(Y, N) \ni (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \circ \Phi, \beta \circ \Phi) \in \mathrm{Hom}(X, M) \times \mathrm{Hom}(X, N).$$

Wieder ist in der Kategorie $\underline{R - Mod}$ ein universelles Element leicht ausgemacht, es ist das direkte Produkt $M \times N$ mit den offensichtlichen Abbildungen

$$\pi_1 : M \times N \longrightarrow M, \pi_2 : M \times N \longrightarrow N.$$

Das zugehörige kommutative Diagramm ist dann

$$\begin{array}{rcc} M \times N & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_1} \\ \xrightarrow{\pi_2} \end{array} & \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \\ {\scriptstyle y \mapsto (\alpha(y), \beta(y))} \uparrow & & \| \\ Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} & \begin{array}{c} M \\ N \end{array} \end{array}$$

Das funktioniert jetzt direkt auch so in der Kategorie aller Gruppen.

3.6 Definition/Bemerkung (*direktes Produkt, direkte Summe*)

Das vorherige Beispiel sagt, dass wir im Allgemeinen aufpassen müssen, wenn von direkten Summen und direkten Produkten die Rede ist. Man neigt ein wenig dazu, diese nicht auseinander zu halten, aber es sind ganz verschiedene Konstruktionen, die nur in manchen Kategorien, die man so kennen lernt, gleich aussehen.

Das *direkte Produkt* von zwei Objekten A, B einer Kategorie $\mathcal{K}$ ist ein Objekt P zusammen mit zwei Morphismen $\alpha : P \longrightarrow A$ und $\beta : P \longrightarrow B$, sodass für jedes Objekt C mit Morphismen $\varphi : C \longrightarrow A$ und $\psi : C \longrightarrow B$ ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Phi : C \longrightarrow P$ existiert mit

$$\varphi = \alpha \circ \Phi, \quad \psi = \beta \circ \Phi.$$

Ein Diagramm hierfür:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \\ B & C \arrow[l, "\psi"] \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Statt P schreibt man gerne $A \,\Pi\, B$; dieses Objekt (zusammen mit den Morphismen) ist bis auf einen Isomorphismus eindeutig durch die universelle Abbildungseigenschaft bestimmt, wenn es denn existiert.

Die *direkte Summe* von A und B ist ein Objekt S zusammen mit zwei Morphismen $\alpha : A \longrightarrow S$ und $\beta : B \longrightarrow S$, sodass für jedes Objekt C mit Morphismen $\varphi : A \longrightarrow C$ und $\psi : B \longrightarrow C$ genau ein Morphismus $\Phi : S \longrightarrow C$ existiert mit

$$\varphi = \Phi \circ \alpha, \quad \psi = \Phi \circ \beta.$$

Auch das gibt es als Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\alpha} & A \\ \beta \uparrow & \overset{\Phi}{\searrow} & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{\psi} & C \end{array}$$

Statt S schreibt man hier oft $A \amalg B$ und nennt das Objekt auch ein *Koprodukt* von A und B. Es wird nicht in jeder Kategorie für beliebige Objekte existieren.

Statt mit zwei Objekten kann man hier auch mit einer Familie von Objekten starten und analog direkte Produkte und Koprodukte definieren.

Wieso sind dann das direkte Produkt und das Koprodukt in der Kategorie der Vektorräume tatsächlich auch verschiedene Vektorräume?

So, das war erst einmal genug Kategorientheorie, jetzt geht es wieder mit richtiger Algebra weiter, wobei wir auch noch des öfteren auf die Sprache der Kategorien zurück kommen werden.