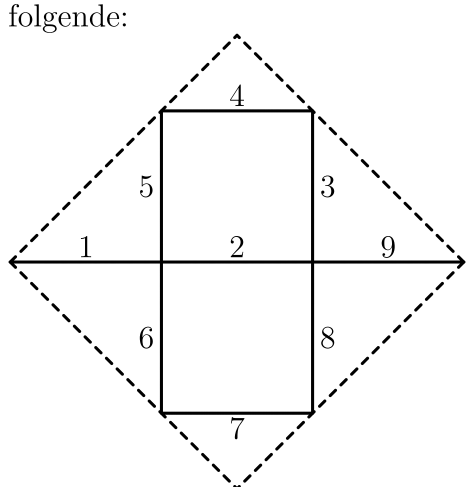
Die Konstruktion einer Peanokurve

Mit der folgenden Konstruktion kann man eine stetige surjektive Abbildung vom Intervall $[0,1]$ in das Quadrat Q mit den Eckpunkten $0,\ 1$ und $\frac{1}{2}(1 \pm \mathrm{i})$ konstruieren.
Wir starten mit der Kurve $\alpha_0 : [0,1] \longrightarrow Q, \alpha_0(t) = t$. Diese verwenden wir, um rekursiv eine Folge von Kurven zu definieren:

$$\alpha_{n+1}(t) = \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} \alpha_n(9t), & \text{wenn } 0 \le t < 1/9, \\ 1 + \alpha_n(9t-1), & \text{wenn } 1/9 \le t < 2/9, \\ 2 + \mathrm{i}\alpha_n(9t-2), & \text{wenn } 2/9 \le t < 3/9, \\ 2 + \mathrm{i} - \alpha_n(9t-3), & \text{wenn } 3/9 \le t < 4/9, \\ 1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}\alpha_n(9t-4), & \text{wenn } 4/9 \le t < 5/9, \\ 1 - \mathrm{i}\alpha_n(9t-5), & \text{wenn } 5/9 \le t < 6/9, \\ 1 - \mathrm{i} + \alpha_n(9t-6), & \text{wenn } 6/9 \le t < 7/9, \\ 2 - \mathrm{i} + \mathrm{i}\alpha_n(9t-7), & \text{wenn } 7/9 \le t < 8/9, \\ 2 + \alpha_n(9t-8), & \text{wenn } 8/9 \le t \le 1. \end{cases}$$

Das Bild der Kurve α_1 ist das folgende:



Daraus entsteht das Bild der Kurve α_2, indem jede der neun durchgezogenen Strecken durch eine verkleinerte Kopie des Bildes von α_1 ersetzt wird usf.
Dem Konstruktionsprozess sieht man an, dass die Folge der Kurven α_n gleichmässig konvergiert, ihr Limes α also existiert und wieder stetig ist. Außerdem ist klar, dass für $m \ge n$ und natürliches $a \le 9^n$ gilt: $\alpha_m(a/9^n) = \alpha_n(a/9^n)$. Schließlich ist im Bild von jedem α_m für $m \ge n$ die Menge aller Punkte aus Q enthalten, die als Real- oder Imaginärteil eine rationale Zahl haben, deren Nenner (nach Kürzen) ein Teiler von 3^n ist.
Das Bild von α ist damit in Q enthalten und enthält die Menge aller Punkte aus Q, die als Real- oder Imaginärteil eine rationale Zahl haben, deren Nenner (nach Kürzen) eine Potenz von 3 ist. Diese Menge ist dicht in Q, und folglich ist α, da sein Bild kompakt sein muss, auch surjektiv.

Es ist klar, dass α nicht injektiv ist. Tatsächlich kann es keine stetige Bijektion ϕ eines kompakten Intervalls I mit einem Quadrat Q geben, denn dann wäre die Umkehrung auch stetig und das Komplement von $\phi^{-1}(q)$ in I für jeden Punkt $q \in Q$ müsste zusammenhängend sein, also ein Intervall, was offensichtlich nicht geht.
Es kann auch keine stückweise glatte surjektive Abbildung von I nach Q geben.