**Riemannsche Mannigfaltigkeiten**

Hier soll eine Definition für Riemannsche Mannigfaltigkeiten vorgeführt werden, die nicht so eng ist, wie die aus der Vorlesung vom 3. Dezember.

Dazu sei $M$ eine $n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, d.h. wir zeichnen einen Atlas $\{(U, \varphi_U) \mid U \in \ddot{U}\}$ aus, wobei $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung von $M$ ist, mit Homöomorphismen

$$\phi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen},$$

sodass für alle $U, V \in \ddot{U}$ :

$$\psi_{V,U} : \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V), x \mapsto \phi_V(\phi_U^{-1}(x)),$$

differenzierbar ist.

Nun betrachten wir zunächst eine dieser Karten $(U, \varphi_U)$. Wir wollen Längen von differenzierbaren Kurven in $U$ messen. Um das Verfahren aus der Analysis zu verallgemeinern, wählen wir hierzu für jeden Punkt $x$ in $Z(U)$ eine Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ aus. Das tun wir durch Wahl einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $S_U(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix $S_U(x)$ soll hierbei bitteschön differenzierbar xon $x$ abhängen.

Ist nun $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$ stetig differenzierbar (d.h. laut Definition $\varphi_U \circ \gamma : [0, 1] \longrightarrow Z(U)$ stetig differenzierbar), so setzen wir $f := \varphi_U \circ \gamma$ und

$$L(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{f'(t)^\top \cdot S_U(f(t)) \cdot f'(t)} \mathrm{d}t.$$

*Das heißt:* die Länge von $\gamma$ erhalten wir durch Integration über die Länge der Ableitung (= Betrag der Geschwindigkeit) von $f$, wobei die Messung der Länge eben auch vom Punkt abhängt, an dem man sich gerade befindet.

Nun taucht das Problem auf, dass diese Definition von der Karte $U$ abängt. Um diese Willkür zu beheben und die Definition auf beliebige (stückweise) stetig differenzierbare Kurven fortsetzen zu können, müssen wir eine Verträglichkeit der Metriken $S_U$ und $S_V$ auf $U \cap V$ verlangen. Die hier hilfreiche Bedingung sehen wir, wenn wir eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow U \cap V$$

betrachten. Für diese soll ja sicher die Länge nicht davon abhängen, ob wir sie als Kurve in $U$ oder als Kurve in $V$ betrachten. Das heißt konkret mit $f_U := \varphi_U \circ \gamma$, $f_V := \varphi_V \circ \gamma$:

$$\int_0^1 \sqrt{f_U'(t)^\top \cdot S_U(f_U(t)) \cdot f_U'(t)} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{f_V'(t)^\top \cdot S_V(f_V(t)) \cdot f_V'(t)} \mathrm{d}t.$$

Nun können wir aber $f_U$ leicht in $f_V$ umrechnen, denn

$$f_V = \psi_{V,U} \circ f_U.$$

Das führt nach der Kettenregel zu

$$f_V'(t) = D\psi_{V,U}(f_U(t)) \cdot f_U'(t).$$

Hierbei ist $D\psi_{V,U}$ die Jacobimatrix von $\psi_{V,U}$. Eingesetzt in die letzte Gleichung heißt das:

$$\int_0^1 \sqrt{f_U'(t)^\top \cdot S_U(f_U(t)) \cdot f_U'(t)} \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^1 \sqrt{f_U'(t)^\top D\psi_{V,U}(f_U(t))^\top \cdot S_V(\psi_{V,U}(f_U(t))) \cdot D\psi_{V,U}(f_U(t)) \cdot f_U'(t)} \mathrm{d}t.$$

Da dies für alle betrachteten Wege gelten soll, ist es also nur sinnvoll, zu verlangen, dass

$$\forall x \in \varphi_U(U \cap V) : D\psi_{V,U}(x)^\top \cdot S_V(\psi_{V,U}(x)) \cdot D\psi_{V,U}(x) = S_U(x).$$

Statten wir den Atlas $(U, \varphi_U), U \in \ddot{U}$, von $M$ zusätzlich mit Abbildungen $S_U$ aus, sodass diese Verträglichkeitsbedingung für alle $U, V \in \ddot{U}$ erfüllt ist, so wird $M$ zu einer *Riemannschen Mannigfaltigkeit.*

Jetzt können wir für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$$

finden, sodass die Einschränkungen von $\gamma$ auf die Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \le i \le k$ stetig differenzierbar sind und ganz in Karten $U_i \in \ddot{U}$ verlaufen.

Die Definition

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{((\varphi_{U_i} \circ \gamma)'(t))^\top S_{U_i}(\varphi_{U_i}(t)) \cdot (\varphi_{U_i} \circ \gamma)'(t)}\mathrm{d}t$$

ist dann von allen getroffenen Wahlen unabhängig.

Ist $M$ zusammenhängend, so erhalten wir durch die Setzung

$$\forall p, q \in M : d(p,q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

eine Metrik auf $M$. Dabei durchläuft $\gamma$ alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven, die auf dem Intervall $[0,1]$ definiert sind.

**Nachtrag**

In der Riemann'schen Geometrie ist man bestrebt, diese kompliziert aussehende Definition durch etwas zu ersetzen, was keinen Bezug mehr auf einen konkreten Atlas nimmt: man will *intrinsisch* arbeiten.

Das geht.

Dazu muss man allerdings das Konzept des Tangentialraums abstrakt klären. Dann wählt man sich an jedem Punkt $P$ von $M$ ein Skalarprodukt $S_P$ auf dem Tangentialraum $T_PM$ an $M$ in $P$. Dazu gehört eine Längenfunktion $|\cdot|_P$ auf $T_PM$. Außerdem soll das Skalarprodukt differenzierbar von $P$ abhängen. Dies entspricht oben der Wahl von $S_U(\varphi_U(P))$, wobei dort alles über die Karten modelliert wird, und die Verträglichkeitsbedingung dafür sorgt, dass die verschiedenen Karten zusammenpassen.

Für eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ liegt dann die Ableitung $\gamma'(t)$ definitionsgemäß immer im Tangentialraum $T_{\gamma(t)}M$, und man setzt

$$L(\gamma) := \int_0^1 |\gamma'(t)|_{\gamma(t)}\mathrm{d}t.$$

In der Analysis identifiziert man den Tangentialraum an $P \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen) immer mit $\mathbb{R}^n$, und benutzt in jedem Punkt das Standardskalarprodukt. Für gekrümmte Räume ist das kein geeignetes Modell mehr, daher muss man sich größere Freiheiten verschaffen.