Topologie

Dr. Stefan Kühnlein

Institut für Algebra und Geometrie, Universität Karlsruhe (TH), Februar 2008

Inhaltsverzeichnis

Soviel vorweg:

Das Ziel diese Skripts ist es, einen ersten Einblick in die Topologie zu geben. An keiner Stelle wird versucht, Ergebnisse bis in die letzten Winkel und Spitzen zu treiben; wir erlauben uns auch bisweilen, nicht geringstmögliche Voraussetzungen in Aussagen zu machen, sondern hoffen, durch eine Beschränkung auf einfachere Situationen bisweilen den Inhalt der Sätze (von denen es ohnehin nicht so viele gibt) deutlich zu machen. Die Vorlesung ist nicht für Spezialisten gedacht - das verbietet sich schon angesichts des Dozenten, der ja auch selbst kein Spezialist ist. Hiermit sei seiner Hoffnung der Ausdruck verliehen, dass die subjektive Stoffauswahl nicht zu sehr zu Lasten der Allgemeinheit geht und ein Verständnis trotz allem zustande kommen kann.

Jedenfalls werden in dieser Vorlesung nicht alle erlaubten Implikationen zwischen allen möglichen Aussagen vorgeführt werden.

Ich habe auf eine umfangreiche Illustration verzichtet, zum einen weil dies in der Vorlesung passieren soll, zum anderen, weil es vielleicht auch für Leser eine instruktive Übung ist, sich selbst ein Bild von dem zu machen, wovon die Rede ist. Der begriffliche Apparat ist das präzise Werkzeug, die Bilder sind ja „nur“ ein Hilfsmittel, das uns helfen soll zu sehen, wo die Werkzeuge angesetzt werden können. Außerdem sind manche Bilder sehr irreführend, zumal wenn es um Sachverhalte geht, die sich definitiv nicht mehr in unserem Anschauungsraum abspielen können.

Das Skriptum entstand parallel zur Vorlesung „Topologie“ an der Universität Karlsruhe im Wintersemester 2007/08. Beim geduldigen Auditorium bedanke ich mich für die angenehme Atmosphäre. Einige Hinweise auf Tippfehler haben mich noch rechtzeitig vor der Fertigstellung erreicht. Insbesondere bei Herrn Joachim Breitner muss ich mich hierfür bedanken. Auch Dominique Krasucka und Andreas Peter haben mich auf einige Unkorrektheiten hingewiesen, insbesondere auf eine Lücke im Beweis von 2.3.12.

Nun zum Inhalt selbst.

Kapitel 1

Einstieg

1.1 Kontext

Die Topologie ist eine mathematische Grundlagendisziplin die sich verstärkt seit dem Ende des 19. Jahrhunderts eigenständig entwickelt hat. Vorher waren einige topologische Ideen im Zusammenhang mit geometrischen und analytischen Fragestellungen entstanden. Um Topologie handelt es sich zunächst immer dann, wenn geometrische Objekte deformiert werden und solche Eigenschaften der Objekte in den Vordergrund treten die sich dabei nicht ändern.

Topologisch ist eine Kugel dasselbe wie ein Würfel - geometrisch zwar völlig unterschiedlich, aber doch gibt es einige Gemeinsamkeiten. Es wäre vielleicht einmal interessant zu verfolgen, ob der Kubismus am Ende des 19. Jhdts. und die topologische Frage nach „simplizialen Zerlegungen“ geometrischer Objekte sich gegenseitig beeinflusst haben...

Der Begriff der Nähe spielt in der Topologie eine gewisse Rolle, mehr als der Begriff des Abstands, der für die Geometrie immerhin namensgebend war. Die topologischen Mechanismen, die so entwickelt wurden, wurden nach und nach von ihren geometrischen Eltern entfernt; dafür sind die Eltern ja da: sich überflüssig zu machen. Und so konnten topologische Ideen sich auch auf andere Bereiche der Mathematik ausdehnen und diese geometrisch durchdringen.

Auch außerhalb der Mathematik ist die Topologie längst keine unbekannte mehr. So gab es in der ersten Hälfte des 20. Jhdts. die topologische Psychologie von Kurt Lewin, die allerdings nur die Terminologie von der Topologie übernahm, und nicht etwa mithilfe topologischer Argumente neue Einsichten produzierte. Etwas anders sieht es natürlich mit den „richtigen“ Naturwissenschaften aus. In der Physik taucht die Topologie zum Beispiel in der Form von Modulräumen in der Stringtheorie auf, und in der Molekularchemie kann man zum Beispiel Chiralität als topologisches Phänomen verstehen.

1.2 Beispiele - was macht die Topologie?

Beispiel 1.2.1 Nullstellenfang mit dem Lasso

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nichtkonstante Polynomabbildung, d.h. $f(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ mit $d > 0$ und $a_d \neq 0$.

Dann hat f eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Das kann man zum Beispiel so plausibel machen:

Wenn $a_0 = 0$ gilt, dann ist $z = 0$ eine Nullstelle. Wenn $a_0 \neq 0$, dann brauchen wir ein Argument. Wir betrachten den Kreis vom Radius R um den Nullpunkt: $RS^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$. Aus der Gleichung

$$f(z) = a_d z^d \cdot (1 + \frac{a_{d-1}}{a_d z} + \cdots + \frac{a_0}{a_d z^d})$$

folgt, dass das Bild von RS^1 unter f jedenfalls für großes R im Wesentlichen der d-fach durchlaufene Kreis vom Radius $|a_d|R^d$ ist. Im Inneren dieser Schlaufe liegen für großes R sowohl die 0 als auch a_0. Wenn man nun den Radius kleiner macht, so wird diese Schlaufe für $R \searrow 0$ zu einer Schlaufe um a_0 zusammengezogen – das ist die Stetigkeit von f. Für kleines R liegt insbesondere 0 nicht im Inneren der Schlaufe. Das aber heißt, dass beim Prozess des Zusammenziehens die Schlaufe irgendwann mindestens einmal die 0 trifft. Dann hat man eine Nullstelle von f gefunden.

Einen anders gelagerten und präzisen topologischen Beweis des Fundamentalsatzes werden wir in 2.3.14 führen.

In diesem Argument – das man streng durchziehen kann – wird ein topologisches Phänomen benutzt, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Das Zusammenziehen der Kurve durch Variation des Parameters R werden wir später allgemeiner als Spezialfall einer Homotopie verstehen.

Beispiel 1.2.2 Fahrradpanne

Es gibt keine stetige Bijektion von einem Torus T („Fahrradschlauch“) auf eine Kugeloberfläche S.

Denn: Auf dem Torus gibt es eine geschlossene Kurve γ, die ihn nicht in zwei Teile zerlegt. Ihr Bild unter einer stetigen Bijektion von T nach S würde dann S auch nicht in zwei Teile zerlegen, da das stetige Bild des Komplements $T \setminus \gamma$ gleich $S \setminus$ Bild von γ zusamenhängend sein müsste, aber das stimmt für keine geschlossene Kurve auf S.

Auch hier sieht man ein topologisches Prinzip am Werk. Es ist oft sehr schwer zu zeigen, dass es zwischen zwei topologischen Räumen (siehe später) keine stetige Bijektion gibt. Dass ich keine solche finde sagt ja noch nicht wirklich etwas aus. . .

In der linearen Algebra weiß man sehr genau, wann es zwischen zwei Vektorräumen einen Isomorphismus gibt, das hängt ja nur an der Dimension. Ähnlich versucht man in der Topologie, zu topologischen Räumen zugeordnete Strukturen zu finden, die nur vom Isomorphietyp abhängen, und deren Isomorphieklassen man besser versteht als die der topologischen Räume.

Beispiel 1.2.3 Eulers [1]Polyederformel

Für die Anzahl E der Ecken, K der Kanten und F der Flächen eines (konvexen) Polyeders gilt die Beziehung $E - K + F = 2$.

Das kann man zum Beispiel einsehen, indem man das Polyeder zu einer Kugel aufbläst, auf der man dann einen Graphen aufgemalt hat (Ecken und Kanten des Polyeders), und dann für je zwei solche zusammenhängenden Graphen zeigt, dass sie eine gemeinsame Verfeinerung haben. Beim Verfeinern ändert sich aber $E - K + F$ nicht, und so muss man nur noch für ein Polyeder die alternierende Summe auswerten, zum Beispiel für das Tetraeder, bei dem $E = F = 4, K = 6$ gilt.

Beispiel 1.2.4 Reelle Divisionsalgebren

Eine reelle Divisionsalgebra ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A mit einer bilinearen Multiplikation, für die es ein neutrales Element gibt und jedes $a \in A \smallsetminus \{0\}$ invertierbar ist.

Beispiele hierfür sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (Hamilton[2]-Quaternionen) und – wenn man die Assoziativität wirklich nicht haben will – $\mathbb{O}$ (die Cayley[3]-Oktaven). Die Dimensionen dieser Vektorräume sind $1, 2, 4, 8$. Tatsächlich ist es so, dass es keine weiteren endlichdimensionalen reellen Divisionsalgebren gibt. Dies hat letztlich einen topologischen Grund.

Zunächst überlegt man sich, dass die Struktur einer Divisionsalgebra auf $\mathbb{R}^n$ auf der $n-1$-dimensionalen Sphäre eine Verknüpfung induziert, die fast eine Gruppenstruktur ist.

Dann kann man im wesentlichen topologisch zeigen, dass solch eine Struktur auf der Späre nur für $n \in \{1, 2, 4, 8\}$ existieren kann. Solch eine Gruppenstruktur stellt nämlich topologische Bedingungen, die für die anderen Sphären nicht erfüllt sind.

Eng damit zusammen hängt der

Beispiel 1.2.5 Satz vom Igel

[1]Leonhard Euler, 1707-1783
[2]William Hamilton, 1788-1856
[3]Arthur Cayley, 1821-1895

Dieser Satz sagt, dass jeder stetig gekämmte Igel mindestens einen Glatzpunkt besitzt. Die Richtigkeit dieses Satzes gründet sich nicht darauf, dass es bisher noch niemanden gelungen ist, einen Igel zu kämmen. Sie hat handfeste mathematische Gründe, die in einer etwas präziseren Formulierung klarer werden:

Etwas weniger prosaisch besagt der Satz „eigentlich“, dass ein stetiges Vektorfeld auf der zweidimensionalen Sphäre mindestens eine Nullstelle besitzt.

Beispiel 1.2.6 Brouwers[4] Fixpunktsatz

Jede stetige Abbildung des n-dimensionalen Einheitswürfels $W = [0,1]^n$ in sich selbst hat einen Fixpunkt.

Für $n = 1$ ist das im Wesentlichen der Zwischenwertsatz. Ist $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ stetig, so ist auch $g(x) := f(x) - x$ eine stetige Abbildung von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, und es gilt $g(0) \geq 0, g(1) \leq 0$.

Also hat g auf jeden Fall eine Nullstelle x_0, aber das heißt dann $f(x_0) = x_0$.

Für $n \geq 2$ ist der Beweis so einfach nicht möglich Wir werden ihm für $n = 2$ später noch fast begegnen. Im Semester ist er eine Übungsaufgabe zu 2.4.14 gewesen.

1.3 Mengen, Abbildungen, usw.

Wir werden für eine Menge M mit $\mathcal{P}(M)$ immer die Potenzmenge bezeichnen:

$$\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}.$$

Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ nennen wir das Urbild $f^{-1}(n)$ eines Elements $n \in f(M) \subseteq N$ auch eine *Faser* von f.

Eine Abbildung ist also injektiv, wenn alle Fasern einelementig sind.

Ist f surjektiv, so gibt es eine Abbildung $s : N \longrightarrow M$ mit $f \circ s = \mathrm{Id}_N$ – die identische Abbildung auf N. Jede solche Abbildung s heißt ein *Schnitt* zu f. Er wählt zu jedem $n \in N$ ein $s(n) \in f^{-1}(n)$ aus. Wenn man also M als Vereinigung der Fasern von f über den Blumentopf N malt, so erhält der Name Schnitt eine gewisse Berechtigung.

Eine *Partition* von M ist eine Zerlegung von M in disjunkte, nichtleere Mengen $M_i, i \in I$, wobei I eine Indexmenge ist:

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad \forall i \neq j : M_i \cap M_j = \emptyset, M_i \neq \emptyset.$$

[4]Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881-1966

Hand in Hand mit solchen Partitionen gehen Äquivalenzrelationen auf M. Die Relation zur Partition $M_i, i \in I$ wird gegeben durch

$$m \sim \tilde{m} \iff \exists i \in I : m, \tilde{m} \in M_i.$$

Umgekehrt sind die Äquivalenzklassen zu einer Äquivalenzrelation $\sim$ eine Partition von M. Die Menge der Äquivalenzklassen nennen wir auch den *Faktorraum* $M/\sim$:

$$M/\sim = \{M_i \mid i \in I\}.$$

Die Abbildung $\pi_\sim : M \longrightarrow M/\sim, \pi_\sim(m) := [m] =$ Äquivalenzklasse von m heißt die *kanonische Projektion von* M auf $M/\sim$.

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, sodass jede Äquivalenzklasse von $\sim$ in einer Faser von f enthalten ist (d.h. f ist konstant auf den Klassen), so wird durch

$$\tilde{f} : M/\sim \longrightarrow N, \tilde{f}([m]) := f(m),$$

eine Abbildung definiert, für die $f = \tilde{f} \circ \pi_\sim$ gilt. Das ist die mengentheoretische Variante des Homomorphiesatzes.

Beispiel 1.3.1 Gruppenaktionen

Ein auch in der Topologie wichtiges Beispiel, wie Äquivalenzrelationen bisweilen entstehen, ist das der *Operation* einer Gruppe G auf der Menge M.

Solch eine Gruppenaktion ist eine Abbildung

$$\bullet : G \times M \longrightarrow M,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \forall m \in M : \quad & e_G \bullet m = m \\ \forall g, h \in G, m \in M : \quad & g \bullet (h \bullet m) = (gh) \bullet m. \end{aligned}$$

Hierbei ist e_G das neutrale Element von G und gh ist das Produkt von g und h in G.

Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\rho_g : M \longrightarrow M, \rho_g(m) := g \bullet m,$$

eine Bijektion von M nach M, die Inverse ist $\rho_{g^{-1}}$, und

$$g \mapsto \rho_g$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von G in die symmetrische Gruppe von M.

Die *Bahn* von $m \in M$ unter der Operation von G ist

$$G \bullet m := \{g \bullet m \mid g \in G\}.$$

Man kann leicht verifizieren, dass die Bahnen einer Gruppenoperation eine Partition von M bilden.

Umgekehrt ist es so, dass jede Partition $(M_i)_{i \in I}$ von M von der natürlichen Aktion einer geeigneten Untergruppe G von $\mathrm{Sym}(M)$ herkommt. Hierzu wähle man einfach

$$G := \{\sigma \in \mathrm{Sym}(M) \mid \forall i \in I : \sigma(M_i) = M_i\}$$

und verifiziere was zu verifizieren ist.

Beispiel 1.3.2 projektive Räume

Es seien K ein Körper und n eine natürliche Zahl.

Auf $X := K^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ operiert die Gruppe $K^\times$ durch die skalare Multiplikation

$$a \bullet v := a \cdot v.$$

Die Bahn von $v \in X$ unter dieser Operation ist $Kv \smallsetminus \{0\}$. Da die 0 ohnehin zu jeder Geraden durch den Ursprung gehört, kann man den Bahnenraum $X/K^\times$ mit der Menge aller Geraden durch den Ursprung identifizieren. Dieser Raum heißt der *n-dimensionale projektive Raum über K*, in Zeichen $\mathbb{P}^n(K)$.

Speziell für $n = 1$ gilt:

$$\mathbb{P}^1(K) = \{[\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}] \mid a \in K\} \bigcup \{[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]\}.$$

Oft identifiziert man den ersten großen Brocken hier mit K, den hinzukommenden Punkt nennt man suggestiver Weise ∞.

Genauso haben wir für beliebiges n eine Zerlegung

$$\mathbb{P}^n(K) = \{[\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}] \mid v \in K^n\} \bigcup \{[\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}] \mid w \in K^n, w \neq 0\} = K^n \bigcup \mathbb{P}^{n-1}(K),$$

wobei die Auswahl des *affinen Teils* K^n durch die Bedingung, dass die letzte Koordinate nicht null ist, relativ willkürlich ist.

Definition 1.3.3 Faserprodukte

Es seien A, B, S Mengen und $f_A : A \longrightarrow S$, $f_B : B \longrightarrow S$ zwei Abbildungen.

Weiter sei F eine Menge mit Abbildungen π_A, π_B von F nach A bzw. B, sodass $f_A \circ \pi_A = f_B \circ \pi_B$.

F heißt ein *Faserprodukt* von A und B über S, wenn für jede Menge M und jedes Paar von Abbildungen g_A, g_B von M nach A bzw. B mit $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$ genau eine Abbildung $h : M \longrightarrow F$ existiert, sodass

$$g_A = \pi_A \circ h, \quad g_B = \pi_B \circ h.$$

Insbesondere impliziert das, dass es zwischen zwei Faserprodukten von A und B über S genau einen sinnvollen Isomorphismus gibt. Denn nach Definition gibt es für ein zweites Faserprodukt $(\widetilde{F}, \widetilde{\pi_A}, \widetilde{\pi_B})$ genau eine Abbildung h von $\widetilde{F}$ nach F mit

$$\widetilde{\pi_A} = \pi_A \circ h, \quad \widetilde{\pi_B} = \pi_B \circ h$$

und auch genau eine Abbildung $\tilde{h} : F \longrightarrow \widetilde{F}$ mit

$$\pi_A = \widetilde{\pi_A} \circ \tilde{h}, \quad \pi_B = \widetilde{\pi_B} \circ \tilde{h}.$$

Dann ist aber $h \circ \tilde{h}$ eine Abbildung von F nach F mit

$$\pi_A = pi_A \circ (h \circ \tilde{h}), \quad \pi_B = \pi_B \circ (h \circ \tilde{h}),$$

was wegen der Eindeutigkeit aus der Definition zwangsläufig

$$h \circ \tilde{h} = \mathrm{Id}_F$$

nach sich zieht. Analog gilt auch

$$\tilde{h} \circ h = \mathrm{Id}_{\widetilde{F}}.$$

Schreibweise: Für das Faserprodukt schreibt man meistens $A \times_S B$, wobei in der Notation die Abbildungen f_A unf f_B unterdrückt werden.

Ein Faserprodukt existiert immer. Wir können nämlich

$$F := \{(a, b) \in A \times B \mid f_A(a) = f_B(b)\}$$

wählen und für π_A, π_B die Projektion auf den ersten beziehungsweise zweiten Eintrag.

Die Abbildung h aus der Definition ist dann einfach $h(m) = (g_A(m), g_B(m))$.

Wir können F auch hinschreiben als

$$F = \bigcup_{s \in S} \left(f_A^{-1}(s) \times f_B^{-1}(s) \right),$$

also als Vereinigung der Produkte der Fasern von f_A und f_B über jeweils demselben Element von S. Das erklärt den Namen.

Beispiel 1.3.4 Spezialfälle

a) Wenn S nur aus einem Element s besteht, dann sind f_A und f_B konstant, und damit $A \times_S B = A \times B$ das mengentheoretische Produkt.

b) Wenn A, B Teilmengen von S sind und die Abbildungen f_A, f_B einfach die Inklusionen, dann gilt

$$A \times_S B = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b\} = \{(s, s) \mid s \in A \cap B\} \cong A \cap B.$$

1.4 Metrische Räume

Definition 1.4.1 Metrischer Raum

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- $\forall x \in X : d(x, x) = 0.$
- $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0.$
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z).$ (Dreiecksungleichung)

Die Abbildung d heißt dabei die *Metrik*.

Penibler Weise sollte man einen metrischen Raum als Paar (X, d) schreiben. Meistens wird das micht gemacht, aber Sie kennen diese Art der Schlamperei ja schon zur Genüge...

Beispiel 1.4.2 LA und ANA lassen grüßen

a) Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird bekanntlich mit

$$d(v, w) := \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle} = |v - w|$$

zu einem metrischen Raum

b) Jede Menge X wird notfalls durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

zu einem metrischen Raum. Diese Metrik heißt die *diskrete Metrik* auf X.

c) Es sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X)$ der Vektorraum der beschränkten reellwertigen Funktionen auf X. Dann wird X vermöge

$$d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

zu einem metrischen Raum.

Anstelle der Norm aus einem Skalarprodukt benutzt man hier also die sogenannte *Maximumsnorm*

$$|f|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\},$$

um eine Metrik zu konstruieren. Diese kommt nicht von einem Skalarprodukt her, wenn X mindestens 2 Elemente hat.

Allgemeiner sei für eine Menge X und einen metrischen Raum (Y,e) die Menge $\mathcal{B}(X,Y)$ definiert als die Menge aller beschränkten Abbildungen von X nach Y. Dabei heißt f beschränkt, wenn ein $R \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : e(f(x_1), f(x_2)) < R.$$

Dann wird $\mathcal{B}(X,Y)$ zu einem metrischen Raum vermöge

$$d(f,g) := \sup\{e(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

d) Auf den rationalen Zahlen lässt sich für eine Primzahl p auf folgende Art eine Metrik konstruieren:

Jede rationale Zahl $q \neq 0$ kann man schreiben als $p^{\mathrm{v}_p(q)} \cdot \frac{a}{b}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ keine Vielfachen von p sind. Dann ist $v_p(q)$ eindeutig bestimmt.

Wir setzen für zwei rationale Zahlen x, y

$$d_p(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ p^{-\mathrm{v}_p(x-y)}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist die sogenannte *p-adische Metrik* auf $\mathbb{Q}$.

Definition 1.4.3 Folgen und Grenzwerte

Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent gegen den Grenzwert* $y \in X$, falls

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y) = 0.$$

Natürlich ist y hierbei eindeutig bestimmt.

b) Eine Cauchyfolge[5] in X ist eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n > N : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

c) X heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in X einen Grenzwert in X hat.

Beispiel 1.4.4 Schatten der Vergangenheit

Jeder endlichdimensionale euklidische Vektorraum ist vollständig.

Die Konvergenz einer Folge in $\mathcal{B}(X)$ mit der ∞-Norm ist einfach die gleichmäßige Konvergenz im Sinne der Analysis. Insbesondere ist $\mathcal{B}(X)$ mit dieser Metrik vollständig.

$\mathbb{Q}$ mit der p-adischen Metrik ist nicht vollständig. Man kann einen Körper $\mathbb{Q}_p$ konstruieren, der $\mathbb{Q}$ enthält, auf dem eine Metrik definiert ist, die die p-adische fortsetzt, der bezüglich dieser Metrik vollständig ist und in dem sich jedes Element durch eine p-adische Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ approximieren lässt. Damit wird ein arithmetisch wichtiges Pendant zu den reellen Zahlen geschaffen, die sich ja auch konstruieren lassen als (archimedische) Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ modulo Nullfolgen.

Definition 1.4.5 Isometrien

Es seien (X, d) und (Y, e) zwei metrische Räume. Eine *abstandserhaltende Abbildung* von X nach Y ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$, für die gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = e(f(x_1), f(x_2)).$$

Solche Abbildungen sind immer injektiv. Eine surjektive abstandserhaltende Abbildung heißt eine *Isometrie*.

Die Menge der Isometrien von X nach X ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(X)$ aller Bijektionen von X nach X.

Aber eigentlich ist das momentan kein Begriff, der unsere Aufmerksamkeit zu stark in Anspruch nehmen sollte.

Definition 1.4.6 Kugeln

Es seien (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$ sowie $r > 0$ eine reelle Zahl. Dann heißt

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

[5] Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857

die *offene Kugel* vom Radius r um den Mittelpunkt x.

Vorsicht: Weder x noch r müssen durch die Menge $B_r(x)$ eindeutig bestimmt sein. Wenn zum Beispiel X mit der diskreten Metrik ausgestattet ist, so ist $X = B_2(x) = B_3(y)$ für alle $x, y \in X$.

Definition 1.4.7 Stetigkeit

Es seien (X, d) und (Y, e) zwei metrische Räume. Dann heißt eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ stetig, falls für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)).$$

In Worten: Jede offene Kugel um $f(x)$ enthält das Bild einer offenen Kugel um x.

So ist zum Beispiel jede Abbildung von X nach Y stetig, wenn auf X die diskrete Metrik vorliegt. Denn dann ist ja $\{x\} = B_{\frac{1}{2}}(x)$ im Urbild jeder offenen Kugel um $f(x)$ enthalten.

Beispiel 1.4.8 Noch einmal die Analysis

Es seien X, Y metrische Räume. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y, und mit $\mathcal{C}_0(X, Y)$ die Menge aller beschränkten stetigen Abbildungen von X nach Y.

Wenn Y vollständig ist, dann ist auch $\mathcal{C}_0(X, Y)$ (als Teilraum von $\mathcal{B}(X, Y)$) vollständig.

Im Fall $Y = \mathbb{R}$ lässt man das Y auch häufig weg und schreibt nur $\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathcal{C}_0(X)$.

Hilfssatz 1.4.9 Normen

Es sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und N eine Norm auf V, d.h. $N : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ erfüllt

- $\forall v \in V : N(v) = 0 \iff v = 0$ *(Positivität),*
- $\forall a \in \mathbb{R}, v \in V : N(av) = |a| N(v)$ *(Homogenität),*
- $\forall v, w \in V : N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ *(Dreicksungleichung).*

Dann ist N stetig bezüglich der Standardmetrik.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von N im Ursrpung.

Es sei also $\delta > 0$.

Wegen der Positivität und der Homogenität gibt es eine Konstante $c > 0$ (abhängig von δ), sodass die Vektoren $\pm ce_i$, $1 \leq i \leq n$, in $N^{-1}(-\delta, \delta)$ liegen. Dabei ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

Es sei $v \in B_{c/n}(0) \subseteq V$, d.h. $v = \sum_{i=1}^n a_i ce_i, \sum_i a_i^2 < 1/n^2$. Dann ist aber die Summe $\sum_i |a_i| < 1$.

Es folgt
$$N(v) \leq \sum N(a_i ce_i) \leq \sum |a_i| N(ce_i) < \delta \sum |a_i| \leq \delta.$$

Damit liegt die offene Kugel $B_{c/n}(0)$ im Urbild: N ist stetig im Ursprung.

Nun seien $x \in V$ beliebig und $\delta > 0$ vorgegeben. Dann gibt es nach dem eben gesehenen ein $\varepsilon > 0$ mit
$$\forall y \in B_\varepsilon(0) : |N(y)| < \delta.$$

Für $y \in B_\varepsilon(0)$ gilt demnach wegen $N(x) = N(x + y - y) \leq N(x + y) + N(y)$:
$$-N(y) \leq N(x + y) - N(x) \leq N(y),$$

und daher $N(B_\varepsilon(x)) \subseteq B_\delta(N(x))$.

Das zeigt die Stetigkeit von N. ○

Definition 1.4.10 Die Topologie eines metrischen Raums

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *offen* , falls für jedes $x \in A$ eine reelle Zahl $r > 0$ existiert, sodass $B_r(x) \subseteq A$ gilt.

Die Gesamtheit aller offenen Mengen in X heißt die *Topologie* von (X, d).

Bemerkung 1.4.11 Eigenschaften

Die offenen Mengen eines metrischen Raums haben die folgenden beiden Eigenschaften: beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Es kann sehr viele verschiedene Metriken auf X geben, die zur selben Topologie führen. So stimmen zum Beispiel für zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ die zugehörigen Topologien überein, was im Wesentlichen aus Hilfssatz 1.4.9 folgt. Dieser Hilfssatz sagt nämlich, dass die Identität auf $\mathbb{R}^n$ stetig ist, wenn wir auf Seiten des Definitionsbereichs die euklidische Standardlänge als Norm benutzen, und auf Bildseite die Norm N. Auch in der anderen Richtung ist die Identität stetig (das muss man noch beweisen!), und das impliziert die Gleichheit der zugehörigen Topologien.

Kapitel 2

Topologische Grundbegriffe

2.1 Topologische Räume und einige Konstruktionen

Definition 2.1.1 Topologischer Raum

Ein *topologischer Raum* ist eine Menge X, für die eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften ausgewählt wurde:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\forall A, B \in \mathcal{T} : A \cap B \in \mathcal{T}$
- $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A \in \mathcal{T}$.

Hierbei heißt $\mathcal{T}$ die Topologie auf X, und die Elemente von $\mathcal{T}$ sind die *offenen Mengen* des topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$.

Die Mengen $X \smallsetminus A, A \in \mathcal{T}$, heißen *abgeschlossene Teilmengen* von X.

Beispiel 2.1.2 Alte Bekannte

Die offenen Mengen eines metrischen Raums X bilden eine Topologie auf X.

Ist X eine beliebige Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Topologie auf X. Sie ist sogar die Topologie zu einer Metrik auf X, zur diskreten Metrik nämlich. Sie heißt die *diskrete Topologie*.

Auch $\{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X.

Auf $\{0, 1\}$ gibt es die Topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Diese kommt nicht von einer Metrik her.

Definition 2.1.3 Inneres, Abschluss und der zu schmale Rand

Es seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Das *Innere* (oder auch der *offene Kern*) $\mathring{A}$ von A ist definiert als die Vereinigung

$$\mathring{A} := \bigcup_{U \subseteq_o A} U,$$

wobei das Symbol $\subseteq_o$ bedeutet, dass U eine (in X) offene Teilmenge von A ist.

$\mathring{A}$ ist die größte offene Teilmenge von A.

Der *Abschluss* $\bar{A}$ von A ist definiert als der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die A enthalten.

$\bar{A}$ ist abgeschlossen, es gibt keine kleinere abgeschlossene Teilmenge, die A enthält.

Der *Rand* von A ist die Menge $\partial A := \bar{A} \smallsetminus \mathring{A}$.

Definition 2.1.4 Dichtheit, Diskretheit

Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *dicht*, wenn ihr Abschluss ganz X ist.

Jede Teilmenge ist also dicht in ihrem Abschluss, wenn man diesen wie in 2.1.8 als topologischen Raum betrachtet.

Eine Teilmenge $D \subseteq X$ heißt *diskret*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die mit D endlichen Durchschnitt hat.

Für metrische Räume heißt das gerade, dass D keinen Häufungspunkt besitzt.

Definition 2.1.5 Umgebungen, Basis einer Topologie

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Für $x \in X$ heißt eine Teilmenge $A \subseteq X$ eine *Umgebung* von x, falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U \subseteq A$. Ist A selbst schon offen, so heißt es eine *offene Umgebung* von x (falls $x \in A$).

b) Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt eine *Basis* von $\mathcal{T}$, falls jedes Element von $\mathcal{T}$ sich schreiben lässt als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$.

   (So sind zum Beispiel die offenen Kugeln $B_r(x)$ eine Basis der Topologie auf einem metrischen Raum.)

   $\mathcal{B}$ heißt eine *Subbasis* von $\mathcal{T}$, falls sich jedes $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt.

c) Für $x \in X$ heißt eine Menge $\mathcal{U}$ von Umgebungen von x eine *Umgebungsbasis* von x, wenn jede Umgebung von x ein Element von $\mathcal{U}$ als Teilmenge enthält.

Bemerkung 2.1.6 Einsichtig

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ist genau dann eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn sie für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis enthält.

Für jede Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}(X)$ gibt es genau eine Topologie, die $\mathcal{B}$ als Subbasis besitzt. Sie ist die *von $\mathcal{B}$ erzeugte* Topologie, und besitzt

$$\{U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{B}\}$$

als Basis.

Definition 2.1.7 Feinheiten

Wenn $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf einer Menge X sind, so heißt $\mathcal{T}_1$ *feiner* als $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, also wenn $\mathcal{T}_1$ mehr offene Mengen besitzt als $\mathcal{T}_2$.

Die feinste Topologie auf X ist also die diskrete, während $\{\emptyset, X\}$ die gröbste Topologie auf X ist (alle anderen Topologien sind feiner).

Zu je zwei Topologien gibt es eine gemeinsame Verfeinerung. Die gröbste gemeinsame Verfeinerung ist die Topologie, die die Vereinigung der beiden gegebenen als Subbasis besitzt.

Definition 2.1.8 Teilräume und Produkte

a) Es seien X eine Menge und $(Y, \mathcal{S})$ ein Topologischer Raum. Weiter sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Für Teilmengen $A_i \subseteq Y$ $(i \in I)$ gilt

$$f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i).$$

Das zeigt bereits, dass

$$\mathcal{T} := \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\}$$

eine Topologie auf X ist. Man nennt sie die *Spurtopologie* auf X (bezüglich f). Es ist die gröbste Topologie, für die f stetig ist (die Topologie auf Y ist dabei gegeben und fest!).

Damit können wir unheimlich viele neue topologische Räume konstruieren. (Tun Sie das!)

b) Ist speziell $X \subseteq Y$ und f die Einbettung dieser Teilmenge, so nennt man X (mit der Spurtopologie) einen *Teilraum* von Y.

   Eine Teilmenge A von X ist genau dann offen bezüglich der Spurtopologie, wenn es eine offene Teilmenge U von Y gibt mit $A = U \cap X$.

c) Sind X, Y zwei topologische Räume, so definieren wir auf $X \times Y$ die *Produkttopologie*, indem wir als Basis die Produkte $U \times V$ für offene $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ verwenden.

Definition 2.1.9 Quotiententopologie

Es sei X ein topologischer Raum und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann wird auf dem Raum $X/\equiv$ der Äquivalenzklassen von X eine Topologie eingeführt, indem man $V \subseteq X/\equiv$ als offen erklärt genau dann, wenn

$$\pi^{-1}(V) = \{u \in X \mid [u] \in V\}$$

in X offen ist. Dabei ist π die kanonische Projektion.

Das ist die feinste Topologie auf $X/\equiv$, für die π stetig ist.

Diese Topologie heißt die *Quotiententopologie* auf $X/\equiv$.

Damit bekommen wir zum Beispiel eine Topologie auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ oder $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Die Topologie auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ verdient hier historisch und didaktisch besondere Aufmerksamkeit. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist genau dann offen, wenn $A \cap \mathbb{C}$ offen ist und wenn zusätzlich im Fall $\infty \in A$ ein $R > 0$ existiert mit

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq A.$$

2.2 Wichtige Eigenschaften topologischer Räume

Definition 2.2.1 Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung enthält:

$$\exists n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots i_n \in I : X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}.$$

Genauso heißt eine Teilmenge von X kompakt, wenn sie bezüglich der Spurtopologie (der Inklusion) kompakt ist.

Anstelle des Begriffs „kompakt“ wird auch gelegentlich „überdeckungsendlich“ verwendet. Es ist nicht ganz einheitlich, ob zur Kompaktheit auch die Eigenschaft, hausdorff'sch zu sein (siehe später), gehört oder nicht. Wir wollen hier Kompaktheit so verstehen wie gesagt.

Hilfssatz 2.2.2 Kompakta in metrischen Räumen

Es sei (X, d) *ein metrischer Raum. Dann gelten:*

a) Ist X *kompakt, so ist* X *beschränkt.*

b) Ist $A \subseteq X$ *kompakt, so ist* A *abgeschlossen.*

c) Ist X *kompakt, so ist* X *vollständig.*

Beweis.

a) Ein kompakter metrischer Raum X ist sicher beschränkt, denn

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)$$

gilt für jedes $x \in X$, und das ist eine offene Überdeckung von X. Es langen also endlich viele $B_n(x)$, um X zu überdecken, und von diesen langt dann auch die größte: $X = B_n(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daher ist X beschränkt.

b) Eine kompakte Teilmenge A eines metrischen Raums X ist abgeschlossen.

Ist nämlich $x \in X \smallsetminus A$ im Komplement von A, so ist

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y \in X \mid d(y, x) > 1/n\}$$

eine offene Überdeckung von A, und damit langen endlich viele dieser Mengen, um A zu überdecken. Es ist also

$$A \subseteq \{y \in X \mid d(y, x) > 1/n\}$$

für ein festes $n \in \mathbb{N}$, und daher ist $B_{1/n}(x)$ in $X \smallsetminus A$ enthalten.

c) Es sei X kompakt und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Wir nehmen an, diese konvergiere nicht, und führen diese Annahme zum Widerspruch.

Es sei $y \in X$. Da die Folge nicht konvergiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \notin B_\varepsilon(y)$.

Andererseits ist die Folge eine Cauchy-Folge, das heißt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k, l > N : d(x_k, x_l) \leq \varepsilon/2.$$

Wäre für ein $k > N$ das Folgenglied $x_k \in B_{\varepsilon/2}(y)$, so wäre nach der Dreiecksungleichung für jedes $l > N$ auch $x_l \in B_\varepsilon(y)$.

Das zeigt, dass höchstens die Folgenglieder x_n mit $n \leq N$ in $B_\varepsilon(y)$ liegen.

Wir halten fest, dass jedes $y \in X$ eine offene Umgebung U_y hat, in der nur endlich viele Folgenglieder liegen.

Nun ist aber $X = \bigcup_{y \in X} U_y$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in X$ mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j}.$$

In jedem U_y liegen aber nur endlich viele Folgenglieder, also ist die Folge endlich, da sie ganz in X verläuft. Das ist der gewünschte Widerspruch ◯

Bemerkung 2.2.3 Erstes über Kompakta in topologischen Räumen

a) Eine abgeschlossene Teilmenge A eines kompakten Raums X ist kompakt, denn für jede Überdeckung $\ddot{U}$ von A durch offene Teilmengen von X ist $\ddot{U} \cup \{X \smallsetminus A\}$ eine offene Überdeckung von X, also langen endlich viele davon, um X zu überdecken, und von diesen endlich vielen kann man notfalls $X \smallsetminus A$ weglassen, um eine endliche Teilüberdeckung von A zu erhalten.

b) Im Allgemeinen muss eine kompakte Teilmenge eines topologischen Raums nicht abgeschlossen sein, siehe Beispiel c) in 2.2.5.

c) Der Durchschnitt eines Kompaktums K in einem toplogischen Raum X mit einer diskreten Teilmenge D ist endlich.

Denn: Jedes $x \in X$ besitzt nach Definition der Diskretheit eine offene Umgebung U_x, die mit D endlichen Schnitt hat. Nun ist aber

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$$

eine offene Überdeckung, und damit gibt es wegen der Kompaktheit von K endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i},$$

und es ist

$$K \cap D = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap D)$$

eine endliche Vereinigung von endlichen Mengen.

Satz 2.2.4 à la Heine[1]-Borel[2]

Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, in dem sich jede beschränkte Menge $A \subseteq X$ für jedes $\varepsilon > 0$ durch endlich viele Mengen von Durchmesser $\leq \varepsilon$ überdecken lässt.

Dann gilt:

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis: In der einen Richtung haben wir es schon gesehen: ein Kompaktum in einem metrischen Raum ist abgeschlossen und beschränkt.

Sei umgekehrt $A \subseteq X$ abgeschlossen und beschränkt. Weiter sei $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung von A. Nehmen wir an, es gebe in $\ddot{U}$ keine endliche Teilüberdeckung von A.

In A gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $A_1 \subseteq A$ von Durchmesser ≤ 1, die sich nicht durch endlich viele $U \in \ddot{U}$ überdecken lässt, da A ja nach Voraussetzung eine endliche Vereinigung von Mengen vom Durchmesser ≤ 1 ist.

Wir wählen – wieder unter Ausnutzung der Eigenschaft von X – sukzessive Teilmengen

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \cdots \supseteq A_k \supseteq \ldots$$

derart, dass A_k Durchmesser $\leq 1/2^k$ hat und sich nicht durch endlich viele $U \in \ddot{U}$ überdecken lässt.

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir nun ein Element $x_i \in A_i$ (so etwas gibt es, nicht wahr?).

Dann ist $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, denn

$$d(x_i, x_k) \leq 1/2^{\max(i,k)}.$$

Also konvergiert die Folge gegen ein $x \in A$, da X vollständig und A abgeschlossen ist.

Dieses x liegt also in einem $U \in \ddot{U}$, und da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ gilt. Daher liegt für großes k auch A_k ganz in U, was der Konstruktion der Teilmengen A_k widerspricht.

Diese ist also nicht möglich, und damit ist A eben doch kompakt. ○

Bemerkung 2.2.5 Beispielmaterial

[1]Heinrich-Eduard Heine, 1821-1881
[2]Emile Borel, 1871-1956

a) Als Spezialfall erhalten wir den klassischen Satz von Heine-Borel, der sagt, dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann überdeckungsendlich ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

   Heine hat diesen Satz 1872 für Intervalle in $\mathbb{R}$ benutzt, um zu zeigen, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig ist. Borel war zu dieser Zeit noch anderweitig beschäftigt.

b) Ein metrischer Raum, in dem diese Äquivalenz nicht gilt, ist zum Beispiel der folgende:

   Es sei $X := \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathbb{N}$ (siehe 1.4.2).

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei δ_n die Funktion auf $\mathbb{N}$, die auf n den Wert 1 annimmt, und sonst den Wert 0. Die Menge

$$D := \{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

   ist eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von X. Aber kompakt ist sie nicht, denn in $B_{1/2}(\delta_n)$ liegt kein weiteres $\delta_k, k \in \mathbb{N}$, und so ist

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{1/2}(\delta_n)$$

   eine offene Überdeckung von D ohne endliche Teilüberdeckung.

   In der Funktionalanalysis spielen ähnliche Räume eine wichtige Rolle, und insbesondere die Frage, wann die abgeschlossene Einheitskugel in einem normierten Vektorraum kompakt ist.

c) Es gibt auch topologische Räume, in denen *jede Teilmenge* kompakt ist, egal ob offen, abgeschlossen, keins von beiden...

   Als Beispiel hierfür nehme ich eine (beliebige!) Menge X und versehe sie mit der *koendlichen* Topologie. Dies heißt, dass neben der leeren Menge genau die Mengen offen sind, deren Komplement in X endlich ist.

   Klar: hier ist alles kompakt. Denn für $A \subseteq X$ und offenes $U \neq \emptyset$ überdeckt U bereits alles bis auf endlich viele Elemente von A.

d) Eine wichtige Beispielklasse für kompakte Räume sind die projektiven Räume $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

   Im Fall $n = 1$ sieht man die Kompaktheit sehr schön wie folgt: Ist $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung von $X = \mathbb{P}^1(K)$ (mit $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), so gibt es darin eine Menge $U_\infty \in \ddot{U}$, sodass $\infty \in U_\infty$. Das Komplement von U_∞ ist nach Konstruktion der Topologie auf $X = K \cup \{\infty\}$ abgeschlossen und beschränkt (siehe 2.1.9 d)) und daher kompakt wegen Heine-Borel. Also reichen endlich viele weitere Elemente aus $\ddot{U}$, um $K \smallsetminus U_\infty$ zu überdecken.

Definition 2.2.6 zusammenhängend

Es sei X ein topologischer Raum. Dann heißt X *zusammenhängend*, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Das ist äquivalent dazu, dass es keine Zerlegung von X in zwei nichtleere, disjunkte und offene Teilmengen gibt.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn sie bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend ist, also genau dann, wenn sie nicht in der Vereinigung zweier offener Teilmengen von X liegt, deren Schnitte mit A nichtleer und disjunkt sind.

Die Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Durchschnitt ist wieder zusammenhängend.

Beispiel 2.2.7 Intervalle

Die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind gerade die Intervalle, egal ob offen oder abgeschlossen oder .... Dabei werden auch die leere Menge und einelementige Mengen als Intervalle gesehen.

Ist nämlich $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend und sind $x < y$ beide in A, so liegt auch jeder Punkt z zwischen x und y in A, da sonst

$$A = (A \cap (-\infty, z)) \bigcup (A \cap (z, \infty))$$

eine disjunkte, nichttriviale, offene Zerlegung von A wäre.

Ist umgekehrt A ein Intervall, so sei $A = B \cup C$ eine nichttriviale disjunkte Zerlegung. Ohne Einschränkung gebe es ein $b_0 \in B$ und ein $c_0 \in C$ mit $b_0 < c_0$.

Es sei $z := \sup\{b \in B \mid b < c_0\}$. Dies liegt in A, und damit auch in B oder C. Wäre $z \in B$ und B offen in A, so müsste es ein $r > 0$ geben mit

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow a \in B.$$

Also kann z nicht zu B gehören, wenn dies offen in A ist, denn es gibt Elemente $c \in C, c > z$, die beliebig nahe an z dran liegen.

Wäre $z \in C$ und C offen in A, so gäbe es ein $r > 0$, sodass

$$\forall a \in A : |z - a| < r \Rightarrow a \in C.$$

Das wiederum geht nicht, denn z ist das Supremum einer Teilmenge von B.

Also sind nicht sowohl B als auch C offen in A, und das zeigt, dass A zusammenhängend ist.

Definition 2.2.8 Zusammenhangskomponenten

Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen zwei Punkte x, y in X *äquivalent*, falls es eine zusammenhängende Teilmenge von X gibt, die beide enthält. Dies ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation:

- $x \simeq x$ ist klar für alle $x \in X$, denn $\{x\}$ ist zusammenhängend.
- Symmetrie ist auch klar, nicht wahr?
- Transitivität: Es seien $x \simeq y$ und $y \simeq z$, dann gibt es zusammenhängende $A, B \subseteq X$, sodass $x, y \in A$ und $y, z \in B$. Aber $A \cup B$ ist auch zusammenhängend, denn aus $A \cup B \subseteq U \cup V$ (offene Überdeckung) folgt $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ und analog für B. Wären die Durchschnitte $(A \cup B) \cap U$ und $(A \cup B) \cap V$ disjunkt, so hätten wir also disjunkte offene Überdeckungen der zusammenhängenden Mengen A und B, und damit folgt OBdA $A \subseteq U, A \cap V = \emptyset$. Genauso ist auch B in einer der beiden Mengen enthalten und hat mit der anderen leeren Schnitt. Aus $B \subseteq U$ folgt $V = \emptyset$, während aus $B \subseteq V$ folgt, dass U und V nicht disjunkt sind: beide enthalten y.

Die Äquivalenzklasse von x heißt die *Zusammenhangskomponente* von x. Diese ist weder zwangsläufig offen noch zwangsläufig abgeschlossen.

Definition 2.2.9 hausdorffsch

Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*[3], wenn je zwei Punkte $x \neq y$ in X disjunkte Umgebungen haben.

Man sagt dann auch, X erfülle das Trennungsaxiom $T2$: verschiedene Punkte lassen sich durch Umgebungen trennen.

Bemerkung 2.2.10 Vererbung

Wenn X hausdorffsch ist, so auch jeder Teilraum von X.

Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.

Das Produkt zweier Hausdorffräume ist wieder hausdorffsch.

Nicht hausdorffsch ist beispielsweise ein Raum X mit mindestens zwei Elementen und der Topologie $\{\emptyset, X\}$.

Bemerkung 2.2.11 Kompakta in Hausdorffräumen

Jedes Kompaktum K in einem Hausdorffraum X ist abgeschlossen. Denn: Ist $x \in X \smallsetminus K$, so gibt es für jedes $k \in K$ disjunkte offene Umgebungen U_k von k und V_k von x. Es ist $\ddot{U} := \{U_k \mid k \in K\}$ eine offene Überdeckung von K, und wegen der Kompaktheit gibt es endlich viele $k_1, \ldots, k_n$ in K, sodass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}.$$

Dazu disjunkt ist $\bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$, aber das ist eine offene Umgebung von x. Also liegt x nicht im Abschluss von K.

[3] Felix Hausdorff, 1868-1942

2.3 Stetigkeit

Definition 2.3.1 Stetige Abbildungen

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *stetig*, falls für jede offene Teilmenge U von Y das Urbild $f^{-1}(U)$ in X offen ist.

Wir hatten dies bei metrischen Räumen als äquivalent zur klassischen $\delta - \varepsilon$-Definition gesehen.

Wie bei metrischen Räumen werden wir mit $\mathcal{C}(X,Y)$ die Menge aller stetigen Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y bezeichnen.

Eine stetige Abbildung, die bijektiv ist, und deren Umkehrabbildung auch stetig ist, heißt ein *Homöomorphismus*. Zwei topologische Räume, zwischen denen es einen Homöomorphismus gibt, heißen kreativer Weise *homöomorph*.

Bemerkung 2.3.2 Sysiphos

In der Topologie betrachtet man zwei homöomorphe topologische Räume als im Wesentlichen gleich. Eine Eigenschaft eines topologischen Raums X heißt eine *topologische Eigenschaft*, wenn jeder zu X homöomorphe Raum diese Eigenschaft auch hat. Kompaktheit, Zusammenhang, Hausdorffizität sind solche Eigenschaften. Beschränktheit eines metrischen Raums ist keine topologische Eigenschaft.

Natürlich möchte man eine Übersicht gewinnen, wann zwei topologische Räume homöomorph sind, oder welche Homöomorphieklassen es insgesamt gibt. Das ist in dieser Allgemeinheit ein aussichtsloses Unterfangen. Es gibt (mindestens) zwei Möglichkeiten, die Wünsche etwas abzuschwächen: man kann sich entweder auf etwas speziellere topologische Räume einschränken oder den Begriff des Homöomorphismus ersetzen.

Das erstere passiert zum Beispiel bei der Klassifikation der topologischen Flächen (also zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten).

Für das zweitere bietet sich der Begriff der Homotopie an, der uns in Kapitel 3 begegnen wird.

Oft genug ist es sehr schwer nachzuweisen, dass zwei gegebene Räume nicht zueinander homöomorph sind. Wenn ich keine bistetige Bijektion finde, sagt das vielleicht mehr über mich aus als über die Räume. Hier ist es manchmal hilfreich, topologischen Räumen besser greifbare Objekte aus anderen Bereichen der Mathematik zuordnen zu können, die für homöomorphe Räume isomorph sind, und wo dies besser entschieden werden kann. Das ist eine Motivation dafür, algebraische Topologie zu betreiben oder allgemeiner eben Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in andere Kategorien zu untersuchen.

Bemerkung 2.3.3 Ringkampf

a) Die Identität auf X ist stets ein Homöomorphismus (wenn man nicht zwei verschiedene Topologien benutzt...). Eine konstante Abbildung ist immer stetig.

b) Die Verknüpfung zweier stetiger Abbildungen $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z$ ist wieder stetig.

   Insbesondere zeigt das, dass homöomorph zu sein eine Äquivalenzrelation auf jeder Menge von topologischen Räumen ist.

c) Sind $f : X \longrightarrow Y$ und $g : X \longrightarrow Z$ stetig, so ist auch $f \times g : X \longrightarrow Y \times Z$ stetig bezüglich der Produkttopologie. Diese ist die feinste Topologie auf $Y \times Z$ mit dieser Eigenschaft.

d) $\mathcal{C}(X)$ ist wieder der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf X (wobei $\mathbb{R}$ bei so etwas immer mit der Standardtopologie versehen ist!). Dies ist wieder ein Ring (bezüglich der üblichen Verknüpfungen), denn die Addition und Multiplikation sind stetige Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$, und wir können b) und c) anwenden.

Hilfssatz 2.3.4 Ein Erhaltungssatz

Es sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig. Dann gelten:

a) Wenn X kompakt ist, dann auch $f(X)$.

b) Wenn X zusammenhängend ist, dann auch $f(X)$.

c) Wenn Y hausdorffsch ist und f injektiv, dann ist X hausdorffsch.

Beweis.

a) Es sei $\ddot{V}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ in Y. Dann ist $\ddot{U} := \{f^{-1}(V) \mid V \in \ddot{V}\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es endlich viele $V_1, \ldots, V_n \in \ddot{V}$, sodass bereits $\{f^{-1}(V_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Überdeckung von X ist.

   Aus $f(f^{-1}(V_i)) = f(X) \cap V_i$ folgt, dass $\{V_1, \ldots, V_n\}$ das Bild von f überdecken.

b) Es sei $f(X) = A \cup B$ eine disjunkte Zerlegung von $f(X)$ in nicht leere Teilmengen. Wenn A, B in der Spurtopologie offen wären, dann gäbe es offene Teilmengen V, W von Y mit $A = V \cap f(X), B = W \cap f(X)$.

   Mithin wäre $f^{-1}(V), f^{-1}(W)$ eine offene Überdeckung von X, die noch dazu disjunkt ist, da sich V und W nicht in $f(X)$ schneiden.

   Andererseits wären diese Teilmengen von X nicht leer (weil A und B nicht leer sind), und das widerspricht der Definition von Zusammenhang.

c) Es seien $x_1 \neq x_2$ Punkte in X. Dann sind ihre Bilder in Y verschieden, denn f soll injektiv sein. Daher haben $f(x_1), f(x_2)$ in Y disjunkte Umgebungen, und deren Urbilder sind disjunkte Umgebungen von x_1 und x_2. ◯

Die Umkehrungen gelten jeweils natürlich nicht, wie einfache Gegenbeispiele lehren. Aber wir treffen bei näherem Hinsehen

Folgerung 2.3.5 alte Bekannte

Es sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a) Wenn X kompakt ist, dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an.

   Als Spezialfall hiervon erinnnern wir an 1.4.9: eine Norm N auf dem $\mathbb{R}^n$ ist immer stetig bezüglich der Standardmetrik. Daher nimmt sie auf der (kompakten) Einheitssphäre ein positives Minimum m und ein Maximum M an, und das führt wegen der Homogenität der Norm zu

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : m|x| \leq N(x) \leq M|x|.$$

   Dies zeigt, dass N und die Standardmetrik dieselbe Topologie liefern.

b) Wenn $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, dann ist auch $f(X)$ ein Intervall – das ist der Zwischenwertsatz.

c) Wir sehen mit dem letzten Hilfssatz auch, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tatsächlich kompakt ist, wie es in 2.2.5 schon gesagt worden war. Tatsächlich ist ja $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ das Bild von $S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \| v| = 1\}$ unter der kanonischen Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

   Analog lässt sich für $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ argumentieren.

d) Es sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ eine Teilmenge, die die Punkte trennt, d.h. für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$, sodass $f(x) \neq f(y)$.

   Dann ist X hausdorffsch. Denn: Für je zwei $x \neq y$ in X wählen wir uns so ein $f \in \mathcal{A}$, das x und y trennt. Dann haben $f(x)$ und $f(y)$ in Y disjunkte Umgebungen, und deren Urbilder unter f sind dann auch disjunkt.

Satz 2.3.6 von Dini[4]

Es seien X ein kompakter topologischer Raum, Y ein metrischer Raum und $(f_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{C}(X, Y)$, die punktweise gegen eine Abbildung $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ konvergiert. Weiterhin gelte für alle $x \in X, n \in \mathbb{N}$:

$$d(f_{n+1}(x), f(x)) \leq d(f_n(x), f(x)).$$

[4]Ulisse Dini, 1845-1918

Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Für jedes $x \in X$ gibt es ein $n(x) \in \mathbb{N}$, sodass für $m \geq n(x)$ gilt:

$$d(f_m(x), f(x)) \leq \varepsilon/3.$$

Da $f_{n(x)}$ und f stetig sind, gibt es eine offene Umgebung U_x von x, sodass

$$\forall y \in U_x : d(f_{n(x)}(x), f_{n(x)}(y)), d(f(x), f(y)) < \varepsilon/3.$$

Das impliziert wegen der Dreiecksungleichung für alle $y \in U_x$: $d(f_{n(x)}(y), f(y)) < \varepsilon$.

Aus $X = \bigcup_{x\in X} U_x$ folgt wegen der Kompaktheit von X die Existenz von endlich vielen Punkten $x_1, \ldots, x_k \in X$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{x_i}.$$

Es sei $N = \max_{1\leq i\leq k} n(x_i)$. Dann gilt für jedes $m \geq N$ und jedes $y \in X$: es gibt ein i mit $y \in U_{x_i}$, und daher wegen der Zusatzeigenschaft über die Konvergenz der Folge (f_n) :

$$d(f_m(y), f(y)) \leq d(f_{n(x_i)}(y), f(y)) < \varepsilon.$$

○

Satz 2.3.7 von Stone[5]-Weierstraß[6]

Es sei K ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ ein Teilring, der die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von K trennt.

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(K)$.

Beweis des Satzes. Hier folge ich den Grundzügen der modernen Analysis von Dieudonné[7].

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{A}}$ den Abschluss von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}(K)$.

Wir führen den Beweis des Satzes in mehreren Schritten.

1. Es gibt eine Folge von reellen Polynomen $u_n \in \mathbb{R}[X]$, die auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Wurzelfunktion konvergiert.

---

[5] Marshall Harvey Stone, 1903-1989
[6] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815-1897
[7] Jean Alexandre Eugène Dieudonné, 1906-1992

Um dies einzusehen setzen wir $u_1 \equiv 0$ und definieren rekursiv[8]

$$u_{n+1}(t) := u_n(t) + \frac{1}{2}(t - u_n(t)^2), n \geq 1.$$

Dann ist (u_n) punktweise monoton steigend (auf $[0,1]$ wohlgemerkt, nur dort betrachten wir das) und beschränkt. Punktweise gilt also (wegen des Monotoniekriteriums und weil $\sqrt{t}$ der einzige positive Fixpunkt der Funktion $x \mapsto x + \frac{1}{2}(t - x^2)$ ist) $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = \sqrt{t}$. Dann impliziert der Satz von Dini die gleichmäßige Konvergenz.

2. Für jedes $f \in \mathcal{A}$ gehört $|f|$ zu $\overline{\mathcal{A}}$.

   Denn für $a := \max_{x\in K} |f(x)|$ ist $a \cdot (u_n(f^2/a^2))$ (mit u_n aus Punkt 1.) eine Folge in $\mathcal{A}$, die gegen $|f|$ konvergiert.

3. Für $x \neq y \in K$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = a, f(y) = b$.

   Denn: Es gibt ja nach Voraussetzung in $\mathcal{A}$ eine Funktion g mit $g(x) \neq g(y)$. Setze nun

   $$f := \frac{a}{g(x) - g(y)}(g - g(y)) + \frac{b}{g(y) - g(x)}(g - g(x)).$$

   NB: x, y sind fest, die Variable versteckt sich hinter dem nackten g.

4. Für jedes $f \in \mathcal{C}(K)$, jedes $x \in K$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $g \in \overline{\mathcal{A}}$ derart, dass

   $$g(x) = f(x), \quad \forall y \in K : g(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

   Zunächst gibt es wegen 3. für jedes $z \in K$ eine Hilfsfunktion $h_z \in \mathcal{A}$, sodass $h_z(x) = f(x)$, $h_z(z) \leq f(z) + \frac{\varepsilon}{2}$. Da h_z stetig ist, gibt es eine Umgebung U_z von z, in der

   $$h_z(y) \leq f(y) + \varepsilon, \quad y \in U_z$$

   gilt. Da K kompakt ist, wird es von endlich vielen der U_z überdeckt, es gibt also $z_1, \ldots, z_n \in K : K = \cup_i U_{z_i}$.

   Setze nun $g(y) := \inf_i h_{z_i}(y)$. Diese Funktion liegt wegen $\inf(p, q) = \frac{1}{2}(p + q - |p - q|)$ in $\overline{\mathcal{A}}$ und hat die gewünschte Eigenschaft.

5. $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(K)$.

   Es sei $f \in \mathcal{C}(K)$ und $\varepsilon > 0$. Für jedes $x \in K$ gibt es eine Funktion $h_x \in \mathcal{A}$ mit

   $$h_x(x) = f(x), \quad \forall y \in K : h_x(y) \leq f(y) + \varepsilon.$$

[8] Das hat schon Heron von Alexandria so etwa 150 v.Chr. gemacht.

Die Stetigkeit von h_x zeigt, dass jedes $x \in K$ eine offene Umgebung V_x hat mit

$$\forall y \in V_x : h_x(y) \geq f(y) - \varepsilon.$$

Ähnlich wie in 4. gibt es $x_1, \dots, x_r \in K$, sodass K von den V_x überdeckt wird. Auch ähnlich wie eben liegt das Supremum g der Funktionen $h_{x_i}, 1 \leq i \leq r$, in $\overline{\mathcal{A}}$, und es gilt

$$||f - g||_\infty \leq \varepsilon.$$

Das ist die Behauptung. ○

Bemerkung 2.3.8 Fourierreihen[9]

a) Eine Anwendung des Satzes von Stone und Weierstraß ist natürlich die klassische Formulierung des Satzes, dass nämlich auf einem Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jede stetige Funktion gleichmäßig durch Polynomfunktionen (in n Veränderlichen) approximiert werden kann.

b) Eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist „nichts anderes“ als eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, die periodisch mit Periode 1 ist. Das kommt von der stetigen natürlichen Projektion von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Nun betrachten wir die stetigen periodischen Funktionen $\sin(2\pi kx)$, $\cos(2\pi lx)$, wobei $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}_0$. Die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus sagen, dass die Menge

$$\mathcal{A} := \{\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(2\pi kx) + \sum_{l=0}^{n} b_l \cos(2\pi lx) \mid n \in \mathbb{N}, a_k, b_l \in \mathbb{R}\}$$

ein Teilring von $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ist. Dieser Ring trennt die Punkte, denn für $0 \leq x \leq y < 1$ folgt aus $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi y)$ und $\cos(2\pi x) = \cos(2\pi y)$, dass $x = y$ ist.

Also sagt Stone-Weierstraß, dass $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dicht liegt, denn $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist kompakt.

Auf diesem Raum gibt es auch ein natürliches Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Den Abstand bezüglich dieses Skalarprodukts nennen wir d_2. Offensichtlich gilt $d_2(f,g) \leq d(f,g)$, wobei d die von uns immer benutzte Norm der gleichmäßigen Konvergenz ist.

Es sei f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $g \in \mathcal{A}$ eine Funktion mit $d(f,g) < \varepsilon$. Wir schreiben $g = \sum_{k=1}^n a_k \sin(2\pi kx) +$

[9] Jean-Baptiste-Joseph de Fourier, 1768-1830

$\sum_{l=0}^{n} b_l \cos(2\pi lx)$ mit einem geeigneten n und wollen nun f auf dem Raum $\mathcal{A}_n$ aller Funktionen „mit festem n" möglichst gut approximieren. Das geht bezüglich der d_2-Metrik besser als bezüglich der ∞-Metrik, denn nun haben wir das ganze Spektrum der Linearen Algebra zur Verfügung.

Die Funktionen

$$s_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\pi kx), c_l(x) := \begin{cases} 1, & l = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi lx), & l \neq 0, \end{cases}$$

bilden für $1 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq n$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{A}_n$.

Daher hat

$$F_n := \sum_{k=1}^{n} \langle f, s_k \rangle s_k + \sum_{l=0}^{n} \langle f, c_l \rangle c_l$$

in $\mathcal{A}_n$ minimalen d_2-Abstand zu f, und im Sinne der d_2-Konvergenz gilt $f = \lim_{n\to\infty} F_n$.

Vorsicht: Die Folge F_n muss jetzt nicht mehr gleichmäßig gegen f konvergieren. Das ist gemein, aber es ist halt so.

c) Der Satz von Stone und Weierstraß spielt auch in der Darstellungstheorie kompakter Gruppen eine große Rolle, da er für den Beweis des Satzes von Peter[10] und Weyl[11] grundlegend ist. Dieser hinwiederum liefert eine Übersicht über alle irreduziblen Darstellungen einer gegebenen kompakten Gruppe K, wie etwa $\mathrm{SO}(n)$ oder $\mathrm{U}(n)$.

Das wiederum spielt in der Teilchenphysik oder in der Elektrodynamik eine seinen Part beim Lösen von Differentialgleichungen mit kompakter Symmetriegruppe. Man denke etwa an das Spektrum des Wasserstoffatoms. Die hierbei auftretenden Kugelflächenfunktionen lassen sich gut mithilfe der Darstellungstheorie der orthogonalen Gruppe verstehen.

Definition 2.3.9 Wo ein Weg ist...

Es sei X ein topologischer Raum. Ein *Weg* ist eine stetige Abbildung eines kompakten reellen Intervalls $[a, b]$ mit $a < b$ nach X.

Sind $f : [a, b] \longrightarrow X$ und $g : [b, c] \longrightarrow X$ zwei Wege mit $f(b) = g(b)$, so ist $g * f : [a, c] \longrightarrow X$ ein Weg, wenn wir

$$g * f(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, b] \\ g(t), & t \in [b, c] \end{cases}$$

[10] F. Peter; von ihm fehlen mir augenblicklich die Daten; der Satz wurde 1927 publiziert. Angeblich wurde Weyl von seinen freunden Peter genannt, aber das hat nichts mit diesem Peter zu tun.

[11] Hermann Weyl, 1885-1955

definieren.

Zwei Wege $f : [a,b] \longrightarrow X$, $g : [c,d] \longrightarrow X$, heißen *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus $h : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ gibt mit

$$f = g \circ h.$$

Oftmals interessiert man sich ja auch nur für die Bildmenge eines Weges, und nicht für eine konkrete Parametrisierung durch die Abbildung f.

X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es für alle $x, y \in X$ einen Weg f mit $f(a) = x, f(b) = y$ gibt.

Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend. Denn je zwei Punkte liegen als Anfangspunkt und Endpunkt im Bild eines Weges, also in einer Zusammenhangskomponente, denn das Bild eines Weges ist zusammenhängend. Daher gibt es nur diese eine Komponente.

Allerdings ist nicht jeder zusammenhängende Raum automatisch wegzusammenhängend.

Definition 2.3.10 Offenheit

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *offen*, wenn für jede offene Teilmenge $A \subseteq X$ das Bild $f(A)$ in Y offen ist.

f heißt *offen in* $x \in X$, falls jede Umgebung von x unter f auf eine Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Insbesondere ist ein Homöomorphismus also eine stetige und offene Bijektion.

Beispiel 2.3.11 Vorbereitung

Es sei $k > 0$ ein natürliche Zahl.

Auf der Menge der komplexen Zahlen ist die Abbildung $z \mapsto z^k$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung, wie in der Beschreibung durch Polarkoordinaten ersichtlich ist.

Außerdem zeigen die Polarkoordinaten, dass diese Abbildung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ lokal injektiv ist. Das heißt: jedes $z_0 \neq 0$ hat eine offene Umgebung, auf der die Abbildung $z \mapsto z^k$ injektiv ist.

Das wiederum impliziert, dass es für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Umgebung gibt, auf der sich eine stetige und offene k-te Wurzel $z \mapsto z^{1/k}$ definieren lässt. In Wirklichkeit ist diese sogar reell differenzierbar.

Dies wird nun implizieren, dass komplexe nichtkonstante Polynome offen sind. Das werden wir später benutzen, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

Hilfssatz 2.3.12 komplexe Polynome

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine polynomiale Abbildung, die nicht konstant ist. Dann ist f offen.

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv nach dem Grad von f Für Grad 1 ist f sogar ein Homöomorphismus, was einen wunderbaren Induktionsanfang liefert.

Nun sei der Grad d von f größer als 1, und für alle nichtkonstanten Polynome kleineren Grades die Behauptung wahr.

Wir zeigen, dass das Bild einer Umgebung der 0 unter f eine Umgebung von $f(0)$ ist. Da Translationen in $\mathbb{C}$ Homöomorphismen sind und aus Polynomen wieder Polynome machen, zeigt das, dass für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jede Umgebung U von z die Menge $f(U)$ eine Umgebung von $f(z)$ ist, und das ist gerade die Behauptung.

Es sei ohne Einschränkung $f(0) = 0$, also $f(z) = \sum_{i=1}^{d} a_i z^i$.

Wir bemerken zunächst, dass f reell differenzierbar ist. Die binomischen Formeln zeigen, dass die Ableitung bei $z \in \mathbb{C}$ gerade (die Multiplikation mit) $\sum_{i=1}^{d} i a_i z^{i-1}$ ist. f ist also sogar stetig differenzierbar.

Die Ableitung im Nullpunkt ist also die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch Multiplikation mit a_1 zustande kommt.

Wenn $a_1 \neq 0$ gilt, dann ist die Ableitung ein Isomorphismus, und der Satz von der impliziten Funktion sagt, dass es eine Umgebung U von 0 und eine Umgebung V von $f(0) = 0$ gibt, sodass f auf U injektiv ist, $f(U) = V$, und die lokale Umkehrabbildung zu f auf V stetig (sogar differenzierbar!) ist. Damit ist f also offen im Ursprung.

Es bleibt der Fall $a_1 = 0$. Es sei $k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$. Dann ist $k > 1$, da $a_0 = a_1 = 0$. Wir wollen zeigen, dass f in einer Umgebung der 0 eine k-te Wurzel hat: $f(z) = g(z)^k$, und dass g offen gewählt werden kann. Dann sagt uns die Offenheit von $z \mapsto z^k$, dass auch f im Nullpunkt offen ist, und wir sind fertig.

Dazu schreiben wir $f(z) = z^k \cdot h(z)$ mit $h(z) = \sum_{i=k}^{d} a_i z^{i-k}$. Ist h konstant, so sind wir im Wesentlichen im Fall von 2.3.11 und damit fertig. Ist h nicht konstant, so greift die Induktionsannehme, und h ist offen. Der Wert von h im Nullpunkt ist $a_k \neq 0$. In einer Umgebung von a_k gibt es wegen 2.3.11 eine stetige, offene k-te Wurzel. Die k-te Wurzel $h(z)^{1/k}$ ist also in einer Umgebung der 0 definiert, und bei näherem Hinsehen sieht man, dass die Ableitung im Nullpunkt regulär ist.

Daher gilt in einer Umgebung der 0 :

$$f(z) = z^k (h(z)^{1/k})^k = (z h(z)^{1/k})^k.$$

Das ist die k-te Potenz einer bei 0 offenen Abbildung, und damit ist f selbst im Ursprung offen. ◯

Satz 2.3.13 à la Liouville[12]

Es seien $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und offene Abbildung, X sei nichtleer und kompakt, Y sei zusammenhängend und hausdorffsch.

Dann ist f surjektiv und insbesondere ist Y auch kompakt.

Beweis. Das Bild von f ist offen nach Definition der Offenheit und kompakt wegen 2.3.4. Als Kompaktum in Y ist $f(X)$ abgeschlossen, siehe 2.2.11. Es ist mithin $Y = f(X) \cup (Y \smallsetminus f(X))$ eine Zerlegung von Y als Vereinigung zweier offener disjunkter Teilmengen. Da $f(X)$ nicht leer ist und Y zusammenhängend ist, muss $Y \smallsetminus f(X)$ leer sein: f ist surjektiv. ◯

Satz 2.3.14 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom.

Dann besitzt f eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Nach Hilfssatz 2.3.12 ist f offen. Außerdem gilt (siehe 1.2.1), dass $|f(z)|$ mit $|z|$ gegen unendlich geht.

Wir können demnach f zu einer stetigen Abbildung $\hat{f}$ von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich selbst fortsetzen, indem wir $\hat{f}(\infty) = \infty$ setzen. Man verifiziert, dass auch $\hat{f}$ offen ist. Sie ist wegen Liouville also auch surjektiv, und es gibt ein $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\hat{f}(z) = 0$. Da z nicht ∞ sein kann (hier wird $\hat{f}$ ja unendlich) ist $z \in \mathbb{C}$ wie behauptet. ◯

2.4 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 2.4.1 Atlas

Es sei X ein topologischer Raum. Ein n-dimensionaler *Atlas* auf X besteht aus einer offenen Überdeckung $\ddot{U}$ von X, sodass für jedes $U \in \ddot{U}$ ein Homöomorphismus

$$\varphi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

existiert, wobei $Z(U)$ in $\mathbb{R}^n$ offen ist.

Zum Beispiel besitzt jede offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ einen Atlas; wir nehmen einfach U selbst als Überdeckung und die Identität als Kartenabbildung.

[12] Joseph Liouville, 1809-1882

Vorsicht: Wir halten im Vorübergehen fest, dass es nicht *a priori* klar ist, dass die Dimension eines Atlas durch die Topologie auf X festliegt. Das ist so, aber der Beweis ist nicht so offensichtlich. Schließlich muss man so etwas zeigen, wie dass es für $m \neq n$ keine offene stetige Abbildung einer m-dimensionalen Kugel in eine n-dimensionale gibt.

Definition 2.4.2 topologische Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum X ist eine n-dimensionale *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn er hausdorffsch ist, mit einem n-dimensionalen Atlas ausgerüstet werden kann und eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Bemerkung 2.4.3 Abzählbarkeitsaxiome

Die letzte Bedingung ermöglicht einige Konstruktionen mit topologischen Mannigfaltigkeiten, die sich als sehr hilfreich erweisen. Sie impliziert zum Beispiel, dass jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung hat.

Man nennt sie auch das *zweite Abzählbarkeitsaxiom*.

Der Name schreit nach einem Vorgänger: ein topologischer Raum erfüllt das *erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Metrische Räume haben diese Eigenschaft zum Beispiel, sie ist eine **lokale** Bedingung, sagt sie doch nur etwas über Umgebungen von einem jeden Punkt aus. Das werden wir im nächsten Hilfssatz einmal austesten.

Wenn es eine abzählbare Umgebungsbasis von x gibt, so gibt es auch eine der Gestalt

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \ldots$$

Das sieht man durch sukzessive Schnittbildung einer gegebenen abgezählten Umgebungsbasis.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert offensichtlich das erste.

Definition 2.4.4 schon wieder Folgen

Eine Folge (x_n) in einem topologischen Raum X *konvergiert gegen* $x \in X$, falls in jeder Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Vorsicht: <u>Der</u> Grenzwert ist im Allgemeinen nicht mehr eindeutig, also eigentlich der bestimmte Singular verboten. Für die Eindeutigkeit des Grenzwerts braucht man ein Trennungsaxiom, zum Beispiel ist hausdorffsch hinreichend.

X heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hilfssatz 2.4.5 Folgen für die Folgenkompaktheit

Es sei X ein topologischer Raum.

a) Ist X kompakt und erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist X folgenkompakt.

b) Ist X folgenkompakt und metrisch, so ist X auch kompakt.

Beweis.

a) Es sei (x_n) eine Folge in X. Dann gibt es ein $x \in X$, sodass in jeder Umgebung U von x für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ der Punkt x_n liegt.

Anderenfalls ließe sich für alle $x \in X$ eine Umgebung U_x finden, die nur endlich viele Folgenglieder enthält, und weil

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

eine endliche Teilüberdeckung hat, hätte man einen Widerspruch.

Nun haben wir so ein x. Dieses besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3, \ldots$$

und wir können bequem eine Teilfolge x_{n_k} wählen mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : n_{k+1} > n_k \quad \text{und} \quad x_{n_k} \in U_k.$$

b) Es sei $\ddot{U}$ eine offene Überdeckung des folgenkompakten metrischen Raums X.

Für jedes $x \in X$ wählen wir ein $U_x \in \ddot{U}$ derart, dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$B_1(x) \subseteq U_x \quad \text{oder} \quad \exists r(x) > 0 : B_{r(x)}(x) \subseteq U_x, \forall U \in \ddot{U} : B_{2r(x)}(x) \not\subseteq U.$$

Jetzt nehmen wir an, dass $\ddot{U}$ keine endliche Teilüberdeckung besitze. Wir starten mit einem beliebigen $x_1 \in X$ und wählen

$$x_2 \in X \setminus U_{x_1},\ x_3 \in X \setminus (U_{x_1} \cup U_{x_2}), \ldots$$

Da X folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $a \in X$ konvergiert. Wir wählen ein $r \in (0,1)$ derart, dass $B_r(a) \subseteq U_a$. Dann liegt x_{n_k} für großes k in $B_{r/5}(a)$, und es gilt

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 2r/5.$$

Andererseits zeigt

$$x_{n_k} \in B_{4r/5}(x_{n_k}) \subseteq B_r(a) \subseteq U_a \in \ddot{U},$$

dass $r(x_{n_k}) \geq 2r/5,$ und damit auch

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \geq 2r/5.$$

Dieser Widerspruch besiegelt das Schicksal unserer irrigen Annahme, $\ddot{U}$ habe keine endliche Teilüberdeckung.

Also ist X kompakt, da $\ddot{U}$ beliebig war. ○

Beispiel 2.4.6 Schönheiten des Abendlandes

Nach diesem Grundlagenexkurs kehren wir nun zu den topologischen Mannigfaltigkeiten zurück. Wir kennen noch keine Beispiele. Oder doch?

a) Jede offene, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Hier muss man vor allem das zweite Abzählbarkeitsaxiom testen. **Tun Sie das!**

   Jeder Hausdorffraum mit einem endlichen Atlas ist dann auch eine topologische Mannigfaltigkeit.

b) Es sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ mit der früher eingeführten Quotiententopologie eine topologische Mannigfaltigkeit.

   Denn er lässt sich überdecken durch die offenen Mengen

$$U_k := \{(x_i)_{1 \leq i \leq n+1} \mid x_k = 1\},\ 1 \leq k \leq n+1,$$

   und diese werden beim Quotientenbilden mit ihrem Bild auch topologisch identifiziert, liefern also einen endlichen Atlas von $\mathbb{P}^n(K)$.

c) Keine topologische Mannigfaltigkeit ist zum Beispiel der folgende Raum, obwohl er einen endlichen Atlas hat: Wir nehmen die Einheitssphäre $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ und definieren $X = S^1/\simeq$, wobei die Äquivalenzrelation $\simeq$ durch $x \simeq -x$ für $x \neq \pm 1$ definiert ist.

   Ein offener Halbkreis wird hierbei injektiv nach X abgebildet, und wir erhalten einen schönen Atlas, von dem sogar zwei Karten genügen. Aber X ist nicht hausdorffsch, weil die Klassen von ± 1 sich nicht durch offene Umgebungen trennen lassen.

Hilfssatz 2.4.7 M ist regulär

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$ ein Punkt.

Dann enthält jede offene Umgebung von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x.

Beweis. Es sei U eine offene Umgebung von x. Wir dürfen annehmen, dass U der Definitionsbereich einer Karte aus dem Atlas von M ist. Es sei $\varphi_U : U \longrightarrow Z(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ die zugehörige Karte und ohne Einschränkung $\varphi_U(x) = 0$.

Weiter sei $r > 0$ gewählt, sodass $\overline{B_r(0)} \subseteq Z(U)$ gilt: diese Menge ist ja offen. Dann liegt der Abschluss $A := \overline{B_{r/2}(0)}$ in $Z(U)$ und dies ist der Abschluss der Umgebung $B_{r/2}(0)$ von 0.

Das zeigt, dass $\varphi_U^{-1}(A) \subseteq U$ der Abschluss in U von einer Umgebung von x ist. Wir müssen noch überlegen, dass $\varphi_U^{-1}(A)$ tatsächlich auch in M abgeschlossen ist. Aber das liegt daran, dass $\varphi_U^{-1} : Z(U) \longrightarrow U \subseteq M$ stetig ist, und daher den kompakten Abschluss $\overline{B_{r/2}(0)}$ auf ein kompaktes und daher abgeschlossenes Bild (wegen 2.2.11) abbildet. ◯

Definition 2.4.8 regulär, normal

Es sei X ein topologischer Raum, in dem die Punkte (d.h.: die einelementigen Teilmengen) abgeschlossen sind (ein sogenannter T_1-Raum also).

Dann heißt X *regulär*, falls für jeden Punkt $x \in X$ jede Umgebung U von x den Abschluss einer offenen Umgebung von x enthält.

Das ist äquivalent dazu, dass für jeden Punkt $x \in X$ und jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ mit $x \notin A$ offene Mengen U, V existieren, sodass gilt:

$$x \in U, A \subseteq V, U \cap V = \emptyset.$$

Wir haben also im letzten Hilfssatz gezeigt, dass eine Mannigfaltigkeit regulär ist.

X heißt *normal*, falls es für je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen A, B in X disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U, B \subseteq V$. Man sagt auch: A und B haben disjunkte offene Umgebungen.

Es ist klar, dass normal regulär impliziert (denn Punkte sind abgeschlossen), und dass regulär hausdorffsch impliziert (dito).

Als nächstes wollen wir sehen, dass Mannigfaltigkeiten auch normal sind, und zeigen sogar:

Satz 2.4.9 Mannigfaltigkeiten sind normal

Es sei X ein regulärer topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

Dann ist X normal.

Beweis.

Es seien A, B zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X. Aufgrund der Regularität gibt es für jedes $a \in A$ eine Umgebung U_a , deren Abschluss zu B disjunkt ist. Wir überdecken A mit diesen U_a. Da das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, gibt es eine abzählbare Überdeckung $\ddot{U}$ von A, sodass alle $U \in \ddot{U}$ einen zu B disjunkten Abschluss haben. Dasselbe können wir auch für B machen: es gibt eine abzählbare offene Überdeckung $\ddot{V}$ von B, sodass alle $V \in \ddot{V}$ einen zu A disjunkten Abschluss haben.

Nun wählen wir eine Abzählung von $\ddot{U}$ und von $\ddot{V}$:

$$\ddot{U} = \{U_1, U_2, U_3, \dots\}, \quad \ddot{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots\}.$$

Nun definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\widetilde{U}_n := U_n \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \text{ und } \widetilde{V}_n := V_n \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}.$$

Diese Mengen sind alle offen, und wir entnehmen nur Punkte, die nicht zu A beziehungsweise B gehören. Demnach sind

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{U_n} \text{ und } B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{V_n}$$

offene und offensichtlich disjunkte Umgebungen von A und B. ○

Bemerkung 2.4.10 Andere Strukturen

a) Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Wenn zwei Karten $\varphi_U : U \longrightarrow Z(U)$, $\varphi_V : V \longrightarrow Z(V)$ auf offenen Mengen mit nichtleerem Schnitt gegeben sind, dann liefert das natürlich insbesondere einen Homöomorphismus

$$\psi_{U,V} : \varphi_U(U \cap V) \longrightarrow \varphi_V(U \cap V),$$

indem wir erst mit φ_U^{-1} zurückgehen und dann mit φ_V absteigen.

Diese Abbildungen $\psi_{U,V}$ heißen die *Kartenwechsel* des Atlanten.

b) Wenn wir von den Kartenwechseln des Atlanten verlangen, dass sie differenzierbar sind, so können wir unter Rückgriff auf den Atlas definieren, wann eine reellwertige Funktion f auf M differenzierbar ist. Das ist sie nämlich genau dann, wenn für alle Karten gilt, dass

$$f \circ \varphi_U^{-1}$$

auf $Z(U)$ differenzierbar ist. Dies ist dann eine konsistente Bedingung, wenn die Kartenwechsel differenzierbar sind, und die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x \in M$ kann durch Blick auf eine einzige Karte getestet werden.

Vorsicht: Es ist nicht klar, was dann die Ableitung einer differenzierbaren Funktion auf M ist, denn der Funktionswert der Ableitung hängt von der benutzten Karte ab. Man muss deshalb ein neues Auffangbecken einrichten, die Differentialformen.

Wenn die Kartenwechsel d-fach differenzierbar sind, so kann man auch sagen, wann eine Funktion d-fach differenzierbar ist. Und hier kann d auch ∞ sein.

So kommt man zum Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit, dem Hauptgegenstand der Differentialtopologie.

c) Wenn die Kartenwechsel differenzierbar sind und ihre Ableitungen Isometrien der Tangentialräume sind (das ist jetzt ein wenig vage formuliert), kann man dies benutzen, um zum Beispiel Längen von differenzierbaren Kurven in M zu definieren. Wenn M zusammenhängend ist, führt dies letztlich zu einer Metrik auf M, und man nennt M dann eine Riemann'sche[13] Mannigfaltigkeit. Dies ist der Hauptgegenstand der Riemann'schen Geometrie.

Ein gutes Beispiel hierfür ist etwa die n-dimensionale Sphäre

$$S^n := \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\}.$$

Hierauf gibt es zwei naheliegende Metriken. Die eine ist die Teilraummetrik, die vom umgebenden euklidischen Raum induziert wird. Diese ist allerdings eben vom umgebenden Raum abhängig, und nicht „intrinsisch“. Die andere kommt dadurch zustande, dass man zu je zwei Punkten das Infimum der Längen aller diese Punkte verbindenden (stückweise stetig differenzierbaren) Kurven in S^n als Abstand zuordnet. Bei diesem Beispiel gibt es sogar kürzeste Verbindungen: das sind Abschnitte von Großkreisen.

Als nächstes wollen wir einen interessanten Existenzsatz über stetige Funktionen auf normalen topologischen Räumen – wie etwa Mannigfaltigkeiten – zeigen.

Satz 2.4.11 Existenzsatz von Urysohn[14]

Es seien X ein normaler topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ zwei disjunkte, abgeschlossene Teilmengen.

Dann gibt es eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$, die auf A konstant gleich 0 und auf B konstant gleich 1 ist und nur Funktionswerte zwischen 0 und 1 annimmt.

[13] Bernhard Riemann, 1826-1866

[14] Pawel Samuilowitsch Urysohn, 1898-1924

Beweis. Natürlich dürfen wir A und B als nichtleer voraussetzen, sonst nehmen wir einfach eine konstante Funktion.

Wir konstruieren zunächst eine Familie von offenen Mengen, die durch die Zahlen

$$D := \{a/2^m \mid 0 \le a \le 2^m, a, m \in \mathbb{N}_0\}$$

parametrisiert werden und die Bedingung

$$\forall p, q \in D, p < q : \overline{U(p)} \subseteq U(q)$$

erfüllen und etwas mit A und B zu tun haben. Diese Definition geht rekursiv nach dem benötigten Exponenten bei der Zweierpotenz im Nenner.

Wir setzen $U(1) = U(1/2^0) := X \smallsetminus B$ und wählen weiter zwei disjunkte Umgebungen U bzw. V von A bzw. B.

Der Abschluss von U ist dann immer noch disjunkt zu B, und wir setzen $U(0) = U(0/2^0) = U$.

Sind nun alle $U(a/2^n)$ für $n \le N$ und alle erlaubten a definiert, so müssen wir $U(a/2^{N+1})$ für ungerade Zahlen $1 \le a \le 2^{N+1} - 1$ definieren.

Dazu wählen wir disjunkte offene Umgebungen U, V von $\overline{U((a-1)/2^{N+1})}$ und $X \smallsetminus U((a+1)/2^{N+1})$, die es wegen der Disjunktheit und der Normalität von X gibt. Dann setzen wir $U(a/2^{N+1}) := U$.

Diese Mengen $U(p)$ tun offensichtlich das, was wir wollen. Wir benutzen sie nun, um f zu definieren. Wir setzen nämlich

$$\forall x \in X : f(x) := \begin{cases} \inf\{p \in D \mid x \in U(p)\}, & \text{falls } x \in U(1), \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

Auf $A \subseteq U(0)$ ist f 0, auf B ist es 1. Wir müssen die Stetigkeit von f zeigen.

Dazu sei $x \in X$ mit $f(x) = r \in [0, 1]$. Weiter sei $\varepsilon > 0$.

Für $r < 1$ wählen wir $d, e \in D$ mit

$$r - \varepsilon < d < r < e < r + \varepsilon.$$

Dann liegt x in $U(e)$, aber nicht in $\overline{U(d)}$, und damit ist $U(e) \smallsetminus \overline{U(d)}$ eine offene Umgebung von x. Für $y \in U(e) \smallsetminus \overline{U(d)}$ gilt offensichtlich

$$f(y) \in [d, e] \subseteq (r - \varepsilon, r + \varepsilon),$$

und daher ist f stetig in x.

Für $r = 1$ gilt ähnliches für

$$X \smallsetminus \overline{U(d)},\ 1 - \varepsilon < d < 1,$$

und wir sind fertig. ○

Dieser Satz sagt also insbesondere, dass die Punkte eines normalen Raumes von den stetigen Funktionen getrennt werden – so wie wir es uns sicher vorstellen. Der Satz hat einen Bruder, der mit ihm oft in einem Atemzug genannt wird.

Satz 2.4.12 Erweiterungssatz von Tietze[15]

Es sei X ein normaler topologischer Raum. Weiter seien $A \subseteq X$ abgeschlossen und $f : A \longrightarrow [-1,1]$ eine stetige Funktion.

Dann lässt sich f zu einer stetigen Funktion $F : X \longrightarrow [-1,1]$ fortsetzen.

Das geht natürlich dann auch für jedes andere Intervall $[a,b]$ anstelle von $[-1,1]$, aber der Beweis ist so etwas weniger notationslastig.

Beweis. Es sei

$$A_0 := \{a \in A \mid f(a) \leq -1/3\},\ A_1 := \{a \in A \mid f(a) \geq 1/3\}.$$

Das sind disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X (denn A ist abgeschlossen), und so finden wir eine stetige Funktion $F_1 : X \longrightarrow [-1/3, 1/3]$, die auf A_0 den Wert $-\frac{1}{3}$ und auf A_1 den Wert $\frac{1}{3}$ annimmt.

Die Funktionswerte von $f - F_1$ liegen also zwischen $-\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3}$.

Wir definieren neue Mengen $A_0^{(2)}$ und $A_1^{(2)}$ durch

$$A_0^{(2)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \leq -2/9\},\ A_1^{(2)} := \{a \in A \mid f(a) - F_1(a) \geq 2/9\}.$$

Dann gibt es eine Funktion F_2 auf X mit Werten in $[-2/9, 2/9]$, die auf $A_0^{(2)}$ den Wert $-2/9$ annimmt und auf $A_1^{(2)}$ den Wert $2/9$. Die Funktionswerte $(f(a) - F_1(a)) - F_2(a)$ liegen für $a \in A$ also alle zwischen $-4/9$ und $4/9$.

Wenn nun $F_1, \dots F_n$ sukzessive so definiert sind, dass auf A die Funktionen f und $F_1 + \ldots + F_n$ sich betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^n$ unterscheiden und F_i für $1 \leq i \leq n$ betragsmäßig nicht größer ist als $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i-1}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} A_0^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \ldots + F_n(a)) \leq -2^{n-1}/3^n\}, \\ A_1^{(n)} &:= \{a \in A \mid f(a) - (F_1(a) + \ldots + F_n(a)) \geq 2^{n-1}/3^n\}. \end{aligned}$$

Wie vorher gibt es eine stetige Funktion $F_{n+1} : X \longrightarrow [-2^{n-1}/3^n, 2^{n-1}/3^n]$, die auf $A_0^{(n)}$ den linken und auf $A_1^{(n)}$ den rechten Randpunkt des Intervalls annimt. Sie unterscheidet sich also von $f(a) - (F_1(a) + \ldots + F_n(a))$ betragsmäßig um höchstens $(\frac{2}{3})^{n+1}$.

[15]Heinrich Franz Friedrich Tietze, 1880-1964

Damit stellen wir sicher, dass es eine nicht abbrechende Folge von Funktionen $F_i, i \in \mathbb{N}$, gibt, die die obigen Abschätzungen erfüllen.

Das zeigt, dass die Funktionenfolge $S_n := F_1 + \ldots + F_n$ gleichmäßig konvergiert, der Limes mithin stetig ist, und dass sie auf A gegen f konvergiert. Außerdem sind die Funktionswerte der Limesfunktion wegen der geometrischen Reihe allesamt zwischen -1 und 1. $\bigcirc$

Bemerkung 2.4.13 Neue Ziele

a) Wenn man im Fortsetzungssatz von Tietze anstelle einer reellwertigen Funktion eine vektorwertige Funktion mit Werten in $[-1,1]^d$ auf A vorgibt, so lassen sich die Komponenten (die ja alle stetige Funktionen sind) alle nach X fortsetzen und zu einer Fortsetzung von f zu einer Funktion $F : X \longrightarrow [-1,1]^d$ kombinieren.

   Wenn anstelle eines solchen übersichtlichen Raums ein Zielraum verwendet wird, von dem man weiß, dass er zu $[-1,1]^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$ homöomorph ist, so gilt der Fortsetzungssatz immer noch.

b) Sie können zeigen, dass es zum Beispiel nicht möglich ist, eine reellwertige stetige Abbildung auf $\mathbb{Z}$ mit der koendlichen Topologie (siehe 2.2.5c)) zu finden, die bei 0 den Wert 0 und bei 1 den Wert 1 annimmt.

   Jede reellwertige Funktion auf $\mathbb{Z}$ mit dieser Topologie ist nämlich konstant.

Beispiel 2.4.14 Wo auch Tietze nicht helfen kann...

Es sei $K := \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und S^1 ihr Rand: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Dann lässt sich die Identität auf S^1 nicht zu einer stetigen Abbildung von K nach S^1 fortsetzen.

Denn: Die Idee ist, dass solch eine stetige Fortsetzung den Einheitskreis S^1 „zerreißen" müsste. Am Rand von K läuft sie einmal um den Kreis herum, und tut dies dann auch in der Nähe des Randes noch; ganz in der Mitte aber, weit innen in K, klappt das wegen der Stetigkeit nicht mehr.

Um dies präzise zu begründen, müssen wir etwas ausholen. Wir tun dies hier, auch um später noch einmal auf diesen länglichen Exkurs zurückkommen.

Wir werden jetzt viel mit der Abbildung

$$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

arbeiten. Diese ist stetig, surjektiv, und $x, y \in \mathbb{R}$ haben genau dann das selbe Bild unter π, wenn ihre Differenz ganzzahlig ist.

Außerdem gibt es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U (zum Beispiel $(x-\frac{1}{3}, x+\frac{1}{3})$), sodass π auf U injektiv ist und die Umkehrabbildung $\psi : \pi(U) \longrightarrow U$ auch stetig ist. Sie ordnet einem Punkt $P \in \pi(U) \subseteq S^1$ den eindeutig bestimmten Winkel $w \in U$ zu, für den $P = \pi(w)$ gilt.

Vorbereitung: Es sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^1$ stetig und $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ mit $\pi(\alpha_0) = \gamma(0)$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lambda(0) = \alpha_0$ und $\pi \circ \lambda = \gamma$.

Eindeutigkeit: Sind $\lambda, \widetilde{\lambda}$ zwei Funktionen mit den gewünschten Eigenschaften, so ist $\lambda - \widetilde{\lambda}$ eine stetige reellwertige Funktion auf $[0,1]$, die wegen der Eigenschaften von π nur ganze Zahlen als Werte annimmt. Also ist die Differenz konstant. Da aber λ und $\widetilde{\lambda}$ bei 0 den selben Wert annehmen, stimmen sie auf ganz $[0,1]$ überein.

Existenz: (Hier weicht der Beweis von dem in der Vorlesung ab. Beide sind schön. . .)

Wir benützen die gleichmäßige Stetigkeit von γ, und sehen, dass es eine natürliche Zahl N gibt, sodass

$$\forall x, y \in [0,1] : |x-y| \leq \frac{1}{N} \Rightarrow |\gamma(x) - \gamma(y)| < 2.$$

Nun unterteilen wir das Intervall $[0,1]$ in N gleichgroße Teilintervalle

$$J_k := [\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}] \subseteq \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Die Einschränkung von γ auf J_k landet in $B_k := S^1 \smallsetminus \{-\gamma(\frac{k-1}{N})\}$, denn für keinen Punkt $t \in J_k$ ist $-\gamma(t) \in \gamma(J_k)$. So hatten wir N ja gewählt.

Auf B_k gibt es eine einseitige stetige Inverse ψ_k zu π,

$$\exists \psi_k : B_k \longrightarrow \mathbb{R} : \pi \circ \psi_k = \mathrm{Id}_{B_k}.$$

Mit dieser inversen ψ_x können wir auf B_k eine stetige Funktion $\lambda_k : J_k \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\lambda_k := \psi_k \circ \gamma|_{J_k}.$$

Die stetige Funktion λ_k erfüllt also für alle $t \in J_k$ die gewünschte Gleichung

$$\pi(\lambda_k(t)) = \gamma(t).$$

Wir können jetzt die Funktionen λ_k benutzen, um auf ganz $[0,1]$ eine passende Funktion λ zu konstruieren.

Es gibt ja ganze Zahlen a_k, sodass

$$\lambda_k(\frac{k}{N}) = \lambda_{k+1}(\frac{k}{N}) + a_k,$$

denn π bildet die reellen Zahlen $\lambda_k(\frac{k}{N})$ und $\lambda_{k+1}(\frac{k}{N})$ auf das selbe Element $\gamma(\frac{k}{N})$ ab.

Nun definieren wir die stetige Funktion $\widetilde{\lambda} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$\widetilde{\lambda}(t) := \lambda_k(t) + a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}, \quad \frac{k-1}{N} \leq t \leq \frac{k}{N},$$

was wohldefiniert ist durch die Wahl der a_i. Das zeigt dann auch schon die Stetigkeit von $\widetilde{\lambda}$, die nach Konstruktion nur noch an den Nahtstellen $\frac{k}{N}, 1 \leq k \leq N-1,$ zu überprüfen ist.

Es gilt konstruktionsgemäß

$$\pi \circ \widetilde{\lambda} = \gamma.$$

Den Anfangswert α_0 erreichen wir durch die Setzung

$$\lambda := \widetilde{\lambda} + \alpha_0 - \widetilde{\lambda}(0).$$

Nach dieser Vorbereitung kehren wir zurück zum Beweis der eigentlich uns interessierenden Aussage.

Es sei $F : K \longrightarrow S^1$ eine stetige Abbildung.

Dann ist $\beta : [0,1] \longrightarrow S^1,\ \beta(r) = F((r,0))$ eine stetige Abbildung, die wir gemäß unserer Vorbereitung schreiben können als

$$\beta = \pi \circ \alpha, \quad \alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig, geeignet.}$$

Weiter haben wir für jedes $r \in [0,1]$ eine Kurve

$$\gamma_r : [0,1] \longrightarrow S^1, \gamma_r(t) := F(r \cdot (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)).$$

Sie merkt sich, was F auf dem Kreis mit Radius r um den Nullpunkt macht. Nach unserer Vorbereitung gibt es also für jedes r genau eine stetige Abbildung

$$\lambda_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ sodass } \lambda_r(0) = \alpha(0) \text{ und } \gamma_r = \pi \circ \lambda_r.$$

Da hier der Anfangswert $\alpha(r)$ von γ_r stetig von r abhängt, erhalten wir eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad H(r,t) := \lambda_r(t).$$

(Die Stetigkeit muss man eigentlich noch verifizieren – ich tue das hier nicht!) Da H stetig ist, ist auch die Abbildung

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, r \mapsto H(r,1) - H(r,0)$$

stetig.

Wegen
$$\pi(H(r,1)) = \gamma_r(1) = F((r,0)) = \gamma_r(0) = \pi(H(r,0))$$
nimmt h nur Werte in den ganzen Zahlen an, und ist damit konstant. Da sicher $h(0) = 0$ gilt – γ_0 ist ja konstant – muss demnach auch $h(1) = 0$ gelten.

Wäre nun die Einschränkung von F auf den Rand S^1 von K die Identität, so wäre $\gamma_1 = \pi|_{[0,1]}$. Damit wäre $\lambda_1(t) = t + \alpha(1)$, und
$$h(1) = \lambda_1(1) - \lambda_1(0) = 1.$$
Das ist ein Widerspruch. – UFF!

Bemerkung 2.4.15 Umlaufzahl

Eng verwandt mit dem eben gesehenen Phänomen ist die Definition der Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve im $\mathbb{R}^2$.

a) Es sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ eine stetige, geschlossene (d.h. $\gamma(0) = \gamma(1)$) Kurve. Wir können γ schreiben als
$$\gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$
Der erste Faktor ist eine stetige Abbildung von $[0,1]$ in die positiven reellen Zahlen, der zweite Faktor nimmt Werte in S^1 an. Folglich gibt es eine stetige Abbildung $\lambda : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft
$$\forall t \in [0,1] : \gamma(t) = |\gamma(t)| \cdot \pi(\lambda(t)).$$
Dann definieren wir die Umlaufzahl von γ um den Nullpunkt durch
$$\chi(\gamma, 0) := \lambda(1) - \lambda(0).$$
Das ist immer eine ganze Zahl.

Analog definieren wir für eine beliebige geschlossene Kurve γ und ein $x \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathrm{Bild}(\gamma)$ die Umlaufzahl von γ um x durch
$$\chi(\gamma, x) := \chi(\gamma - x, 0).$$

b) Ist γ stetig differenzierbar und identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, so stimmt diese neue Definition der Umlaufzahl mit derjenigen aus der Funktionentheorie überein.

Wir betrachten den Fall, dass 0 nicht von γ durchlaufen wird und schreiben γ als
$$\gamma(t) = r(t) \cdot \exp(2\pi i f(t)),$$

wobei $r(t) > 0, f(t) \in \mathbb{R},$ und stetig differenzierbar von t abhängt.

Die Umlaufzahl von γ um die 0 im Sinne der Funktionentheorie ist dann

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^1 \frac{r'(t) \exp(2\pi \mathrm{i} f(t))}{r(t) \exp(2\pi \mathrm{i} f(t))} + \frac{r(t) 2\pi \mathrm{i} f'(t) \exp(2\pi \mathrm{i} f(t))}{r(t) \exp(2\pi \mathrm{i} f(t))} \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \ln r(t)|_0^1 + f(t)|_0^1 =$$

$$f(1) - f(0).$$

wie gewünscht.

c) Ist
$$\Gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$$
stetig und ist für jedes $r \in [0,1]$ die Kurve

$$\gamma_r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, \gamma_r(t) := \Gamma(r,t)$$

geschlossen, dann haben alle Kurven γ_r dieselbe Umlaufzahl um den Nullpunkt.

Denn wie oben lässt sich eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

finden, sodass für alle $(r,t) \in [0,1] \times [0,1]$ die Gleichung

$$\frac{\Gamma(r,t)}{|\Gamma(r,t)|} = \pi(H(r,t))$$

erfüllt ist. Dann gilt für jedes r aber auch

$$\chi(\gamma_r, 0) = H(r,1) - H(r,0).$$

Da dies stetig von r abhängt und nur ganzzahlige Werte annimmt, ist diese Größe konstant auf $[0,1]$.

2.5 Mehr von den Kompakta

Wir haben jetzt schon ein paar Mal gesehen, dass der Begriff der Kompaktheit ein wichtiger Begriff in der Topologie ist. Daher wollen wir jetzt diesen Begriff noch etwas mehr beleuchten.

Unser erstes Ziel ist der Satz von Tikhonow[16].

Zunächst müssen wir aber sagen was ein unendliches Produkt von topologischen Räumen ist.

Definition 2.5.1 unendliche Produkte

Es seien I eine Indexmenge und $X_i, i \in I,$ topologische Räume. Das (meistens unendliche) *Produkt* $\prod_{i\in I} X_i$ ist definiert als die Menge aller Abbildungen

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i, \text{ sodass } \forall i \in I : f(i) \in X_i.$$

Die Elemente dieses Produkts werden wir oft auch suggestiv als $(x_i)_{i\in I}$ notieren.

Auf dem Produktraum wollen wir eine Topologie einführen, nämlich die gröbste, für die alle Projektionen auf die Komponenten stetig sind.

Für festes i_0 sei $U \subseteq X_{i_0}$ offen. Dann muss also die Menge $S(i_0, U)$ aller Funktionen f aus dem Produkt mit der Eigenschaft

$$f(i_0) \in U$$

im Produktraum offen sein.

Die Topologie ist damit diejenige, die die Mengen $S(i, U)$ mit $i \in I, U \subseteq X_i$ offen, als Erzeuger (Subbasis, siehe 2.1.5) besitzt.

Eine Teilmenge $T \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ ist also genau dann offen, wenn für jedes $f \in T$ endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ und offene Mengen $U_j \subseteq X_{i_j},\ j = 1, \dots, k,$ existieren, sodass

$$f \in S(i_1, U_1) \cap \dots S(i_k, U_k) \subseteq T$$

Der Satz von Tikhonow wird nachher sagen, dass ein Produkt von kompakten Räumen wieder kompakt ist. Als Vorbereitung zeigen wir schon einmal das folgende.

Hilfssatz 2.5.2 spezielle Überdeckungen

Es seien $X_i, i \in I,$ kompakte topologische Räume und es gebe eine Überdeckung $\ddot{U}$ von $\prod_{i\in I} X_i$ durch offene Teilmengen der Form $S(i, U)$, wie wir sie in der Definition der Produkttopologie als Subbasis benutzt haben.

Dann besitzt $\ddot{U}$ eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis.

[16] Andrej Nikolajewitsch Tikhonow, 1906-1993; oft auch als Tychonoff transkibiert

Für den Beweis muss man tatsächlich alles vor allem sauber hinschreiben. Wir wählen also eine Indexmenge J und schreiben uns die Überdeckung $\ddot{U}$ als

$$\ddot{U} = \{S(i_j, U_j) \mid j \in J, i_j \in I, U_j \subseteq X_{i_j} \text{ offen}\}.$$

Weiter sei für $i \in I$ die Menge $J(i) := \{j \in J \mid i_j = i\} \subseteq J$ definiert.

Wir nehmen an, es gebe für jedes $i \in I$ ein $y_i \in X_i$, sodass

$$\forall j \in J(i): \ y_i \notin U_j.$$

Dann betrachten wir das Element $(y_i)_{i \in I}$ mit so gewählten Einträgen. Es liegt in einem $S(i_j, U_j)$, und daher muss $y_{i_j} \in U_{i_j}$ gelten entgegen der Konstruktion der y_i.

Demnach gibt es ein $i_0 \in I$, sodass jedes $x \in X_{i_0}$ in mindestens einem U_j, $j \in J(i_0)$ liegt. Das bedeutet $X_{i_0} = \bigcup_{j \in J(i_0)} U_j$, und wegen der Kompaktheit von X_{i_0} gibt es eine endliche Teilmenge $F \subseteq J(i_0)$ mit

$$X_{i_0} = \bigcup_{j \in F} U(j).$$

Das erzwingt

$$\prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in F} S(i_0, U_j),$$

und wir haben eine endliche Teilüberdeckung. ○

Um nun weiter zu machen brauchen, wir eine neue Definition.

Definition 2.5.3 Filter, Ultrafilter

a) Es sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$ heißt ein *Filter*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\forall U, V \in \mathcal{F} : U \cap V \in \mathcal{F}$.
- $\forall U \in \mathcal{F} : \forall V \subseteq X : [U \subseteq V] \Rightarrow V \in \mathcal{F}$.
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Als Beispiel für einen Filter nehmen wir einen topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$. Dann ist die Menge $\mathcal{F}$ aller Umgebungen von x ein Filter auf X.

Ist umgekehrt X eine beliebige Menge, so sei für jeden Punkt $x \in X$ ein nichtleerer Filter $\mathcal{F}_x$ ausgewählt, sodass $\forall A \in \mathcal{F}_x : x \in A$. Dann ist das System

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid \forall x \in U : \exists A \in \mathcal{F}_x : A \subseteq U\}$$

eine Topologie auf X.

Der Filterbegriff hängt also eng mit dem Begriff einer Topologie zusammen.

b) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X heißt ein *Ultrafilter,* wenn er in keinem größeren Filter enthalten ist.

c) Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X, so *konvergiert der Filter gegen* $a \in X$, falls jede Umgebung von a zu $\mathcal{F}$ gehört.

Hilfssatz 2.5.4 Zorn und Konsorten

Es sei X eine Menge.

a) *Jeder Filter auf X ist in mindestens einem Ultrafilter enthalten.*

b) *Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X, so gilt für jede Teilmenge $U \subseteq X$, dass entweder U oder $X \setminus U$ zu $\mathcal{F}$ gehört.*

Beweis. a) Es sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Weiter sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Filter auf X, die $\mathcal{F}$ enthalten. Dies ist eine nichtleere Menge, die durch Inklusion geordnet ist. Für jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{F}_i, i \in I$, von Elementen in $\mathcal{M}$ ist auch die Vereinigung

$$\mathcal{G} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

ein Filter, der $\mathcal{F}$ enthält. Hierbei heißt „total geordnet“, dass für alle $i, j \in I$ eine der beiden Inklusionen $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ oder $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$ gilt. Diese Eigenschaft braucht man für die Filtereigenschaften der Vereinigung: für alle $A, B \in \mathcal{G}$ gibt es Indizes $i, j \in I$ sodass

$$A \in \mathcal{F}_i,\ B \in \mathcal{F}_j.$$

Dann ist aber wegen der Totalordnung auch $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j$ gleich $\mathcal{F}_i$ oder $\mathcal{F}_j$, und damit $A \cap B$ in $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{G}$ enthalten. Das zeigt, dass $\mathcal{G}$ eine (sogar die kleinste) obere Schranke für die total geordnete Teilmenge.

Das Lemma von Zorn[17] impliziert daher die Existenz eines maximalen Elements in $\mathcal{M}$, und dieses ist dann ein Ultrafilter, der $\mathcal{F}$ enthält.

b) Nun sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und A eine Teilmenge von X.

Wenn es $A, B \in \mathcal{F}$ gäbe mit $A \cap U = B \cap (X \setminus U) = \emptyset$, dann wäre $B \cap A = \emptyset$ im Widerspruch zu den Filteraxiomen.

Also hat U oder $X \setminus U$ mit allen $A \in \mathcal{F}$ nichtleeren Schnitt (hier langt es, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist).

Wir nehmen OBdA an, dass U mit allen $A \in \mathcal{F}$ nichtleeren Durchschnitt hat.

[17] Max-August Zorn, 1906-1993

Dann ist aber
$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{\widetilde{A} \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{F} : U \cap A \subseteq \widetilde{A}\}$$
ein Filter auf X, der natürlich U und $\mathcal{F}$ enthält.

Da $\mathcal{F}$ maximal ist, muss $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$ folgen, und es gilt $U \in \mathcal{F}$.

Natürlich gehört $X \smallsetminus U$ dann nicht auch zu $\mathcal{F}$, da die leere Menge sonst auch dazugehören müsste. ◯

Bemerkung: Für jedes $x \in X$ ist der Filter aller Teilmengen von X, die x enthalten, ein Ultrafilter auf X.

Wenn ein Ultrafilter auf X keine einelementige Menge enthält, dann enthält er das Komplement jeder endlichen Teilmenge von X. Man sieht leicht, dass für unendliches X die Menge

$$\mathcal{F} := \{X \smallsetminus E \mid \#E < \infty\}$$

ein Filter ist. Das ist aber weit davon entfernt, ein Ultrafilter zu sein, denn es gibt ja auch unendliche Teilmengen $U \subseteq X$, die nicht die Komplemente von endlichen Mengen sind. Bei diesen muss noch entweder U oder $X \smallsetminus U$ zu $\mathcal{F}$ dazugenommen werden.

Ein Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{N}$ zum Beispiel ist immer überabzählbar, denn

$$\mathcal{F} \ni A \mapsto \mathbb{N} \smallsetminus A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus \mathcal{F}$$

ist eine Bijektion (surjektiv, weil für jede Menge U entweder U oder $\mathbb{N} \smallsetminus U$ zu $\mathcal{F}$ gehört). Also haben $\mathcal{F}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus \mathcal{F}$ die gleiche Kardinalität, und ihre Vereinigung ist die überabzählbare Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Satz 2.5.5 von Tikhonow

Es seien I eine Indexmenge, X_i, $i \in I$, kompakte topologische Räume, und $X := \prod_{i\in I} X_i$ ihr Produktraum.

Dann ist auch X kompakt.

Beweis.

Wir zeigen zunächst, dass jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert.

Wäre dem nicht so, dann gäbe es für jedes $x \in X$ eine Umgebung der Form $S(i(x), U(x)) \notin \mathcal{F}$, wenn nur der Index $i(x) \in I$ und die offene Menge $U(x) \subseteq X_{i(x)}$ geeignet gewählt werden. Sonst wären ja alle $S(i, U)$, in denen x liegt, in $\mathcal{F}$ enthalten, und mit diesen auch die endlichen Durchschnitte, die andererseits eine Umgebungsbasis von x bilden. Somit läge jede Umgebung von x in $\mathcal{F}$, im Widerspruch zur per Annahme fehlenden Konvergenz.

Da sich X durch die $S(i(x), U(x))$ überdecken lässt, langen nach 2.5.2 bereits endlich viele davon:

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} S(i(x_k), U(x_k)).$$

Da die beteiligten Umgebungen alle nicht in $\mathcal{F}$ liegen, liegen ihre Komplemente in dem Ultrafilter – das haben wir gerade gelernt.

Der Durchschnitt der Komplemente liegt also auch in $\mathcal{F}$, ist aber leer – das widerspricht der Filterdefinition.

Daher muss der Filter gegen ein $x \in X$ konvergieren.

Nun sei $\ddot{U}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Wir nehmen an, es gebe keine endliche Teilüberdeckung.

Dann sei

$$\mathcal{F} := \{V \subseteq X \mid \exists U_1, \ldots, U_n \in \ddot{U} : X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n) \subseteq V\}.$$

Das ist ein Filter auf X, denn der vermiedene Durchschnitt ist immer nichtleer.

Also ist $\mathcal{F}$ immer in einem Ultrafilter $\widetilde{\mathcal{F}}$ enthalten. Dieser konvergiert aber gegen ein $x \in X$. Dieses x liegt in mindestens einem $U \in \ddot{U}$, und daher gehört U zu $\widetilde{\mathcal{F}}$. Andererseits gehört auch $X \setminus U$ zu $\mathcal{F}$ und damit auch zum Ultrafilter, was aber nach den Filteraxiomen nicht sein kann. ◯

Bemerkung 2.5.6 Wieder einmal ein Ring

a) Es sei X ein topologischer Raum. Dazu gehört immer der Ring $\mathcal{C}_0(X)$ der beschränkten stetigen Funktionen auf X. Im Weiteren werden wir noch lieber komplexwertige Funktionen betrachten, also

$$\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}).$$

Dieser Ring ist kommutativ und enthält die konstanten Funktionen, die wir mit $\mathbb{C}$ identifizieren; er ist also eine kommutative $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement.

Der Ring ist ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, und die Norm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$$

ist submultiplikativ: $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Außerdem ist der Raum vollständig bezüglich der von $\|\cdot\|$ gelieferten Metrik.

Insgesamt heißt das kurz und bündig: $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ ist eine kommutative, komplexe Banachalgebra.

b) Wenn X ein beschränkter metrischer Raum ist, dann erhalten wir eine isometrische Einbettung von X nach $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ durch

$$X \ni x \mapsto [y \mapsto d(x, y)] \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}).$$

Im Allgemeinen ist so eine Einbettung natürlich nicht möglich.

Aber eine wichtige Eigenschaft der Funktion, die man x hier zuordnet, ist, dass sie x selbst als einzige Nullstelle besitzt. Das macht man nun zum Prinzip, und statt sich eine einzelne Funktion herauszupicken, definiert man das Folgende.

c) Es sei X wieder ein beliebiger topologischer Raum. Für $x \in X$ heißt

$$V(x) := \{f \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) \mid f(x) = 0\}$$

das *Verschwindungsideal* von x.

Es ist ein Ideal in $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$, das heißt:

- $V(x) \neq \emptyset$,
- $\forall f, g \in V(x) : f - g \in V(x)$,
- $\forall f \in V(x), g \in \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) : fg \in V(x)$.

Das Ideal $V(x)$ ist der Kern der Abbildung

$$\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x).$$

Diese Abbildung ist surjektiv, denn es gibt ja die konstanten Funktionen auf X.

Daher ist $V(x)$ ein maximales Ideal in $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$. Jedes größere Ideal enthielte eine Funktion f die bei x einen Wert $w \neq 0$ annimmt, also läge auch die konstante Funktion $w = f - (f - w)$ im größeren Ideal, und damit auch $g = w^{-1} \cdot (wg)$ für jede Funktion g: Ein größeres Ideal ist zwangsläufig der ganze Ring.

d) Nun führen wir die Menge aller maximalen Ideale in $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ ein. Das ist also die Menge aller Ideale in dem Ring, die in keinem echten größeren Ideal enthalten sind.

Wir nennen diese Menge das *Maximalspektrum* von $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ und notieren sie als $\mathrm{mSpec}(\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}))$.

e) Die Abbildung $X \longrightarrow \mathrm{mSpec}(\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})), x \mapsto V(x),$ aus Punkt c) ist im Allgemeinen nicht injektiv.

Wenn aber X normal ist, dann lassen sich nach dem Satz von Urysohn (d.h. 2.4.11) die Punkte durch stetige Funktionen trennen, und das erzwingt die Injektivität.

Hilfssatz 2.5.7 Kompaktheit

Es sei X kompakt und normal. Dann ist die oben beschriebene Abbildung

$$X \ni x \mapsto V(x) \in \mathrm{mSpec}(\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}))$$

eine Bijektion.

Beweis. Die Injektivität haben wir schon sicher gestellt. Sie folgt aus der Normalität. Also sollte die Kompaktheit für die Surjektivität verantwortlich sein.

Wir zeigen dazu, dass jedes echte Ideal $I \subset \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ in einem der Ideale $V(x)$ enthalten ist. Das impliziert die Surjektivität.

Wäre I in keinem der Ideale $V(x)$ enthalten, so gäbe es für jedes $x \in X$ eine Funktion $f_x \in I$ mit $f_x(x) \neq 0$. Mit der Funktion f_x ist aber auch die Funktion $\overline{f_x}$ (komplex Konjugierte) stetig und beschränkt, und daher wegen der Idealeigenschaften auch

$$g_x := f_x \cdot \overline{f_x}, \quad g_x(y) = |f_x(y)|^2,$$

im Ideal I. Diese Funktion nimmt nur nichtnegative reelle Werte an. Auf einer offenen Umgebung U_x von x ist sie strikt positiv. X wird von den U_x überdeckt. Wegen der vorausgesetzten Kompaktheit von X gibt es also $x_1, \dots, x_n \in X$: $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.

Die Summe $h := g_{x_1} + \cdots + g_{x_n}$ hat nun nur strikt positive Funktionswerte, und sie gehört auch zu I. Ihre Inverse $\frac{1}{h}$ ist stetig und beschränkt, und daher ist auch $1 = \frac{1}{h} \cdot h \in I$. Mit 1 gehört dann aber jede Funktion aus $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ zu I dazu, und es handelt sich nicht um ein echtes Ideal. ◯

Definition 2.5.8 schwache Topologie, stetige Linearformen

a) Es seien X, I Mengen und $Y_i, i \in I$, topologische Räume. Weiter sei für jedes $i \in I$ eine Abbildung $f_i : X \longrightarrow Y_i$ gegeben.

   Dann heißt die gröbste Topologie auf X, für die alle f_i stetig sind, die *schwache Topologie* (für das System $((Y_i, f_i))_{i \in I}$).

   Eine Subbasis für diese Topologie ist zum Beispiel die Menge aller

$$f_i^{-1}(U), \ i \in I, U \subseteq Y_i \text{ offen}.$$

   Zum Beispiel ist für $X = \prod_{i \in I} Y_i$ und $f_i((y_j)_{j \in I}) = y_i$ die schwache Topologie gerade die Produkttopologie.

   Umgekehrt ist die schwache Topologie in der allgemeinen Situation einfach die Spurtopologie der Abbildung

$$X \ni x \mapsto (f_i(x))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$$

   bezüglich der Produkttopologie rechter Hand.

b) Wir betrachten jetzt auf $\mathcal{A} := \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ stetige Linearformen. Das sind (wie man leicht sieht) die Linearformen λ auf $\mathcal{A}$ mit der Eigenschaft

$$\exists \delta > 0 : \forall f \in \mathcal{A} : |\lambda(f)| \leq \delta \|f\|.$$

Hier ist wie üblich $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$.

Die Menge aller stetigen Linearformen bezeichnen wir mit $\mathcal{A}'$. Die Norm einer stetigen Linearform ist das Infimum aller positiven δ mit der beschriebenen Eigenschaft. Alternativ ist

$$\|\lambda\| := \sup\{|\lambda(f)| \mid f \in \mathcal{A}, \forall x : |f(x)| \leq 1\}.$$

Zum Beispiel hat die zu einem Punkt x gehörende Linearform $f \mapsto f(x)$ Norm 1.

Auf $\mathcal{A}'$ betrachtet man oft auch die sogenannte *schwach-$*$-Topologie*. Das ist die schwache Topologie auf $\mathcal{A}'$ bezüglich der Abbildungen

$$\mathcal{A}' \longrightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto \lambda(f),\ f \in \mathcal{A}.$$

c) Wir haben jetzt eine Abbildung $\Lambda : X \longrightarrow \mathcal{E} := \{\lambda \in \mathcal{A}' \mid \|\lambda\| \leq 1\}$. In der Funktionalanalysis zeigt man mithilfe des Satzes von Tikhonow, dass $\mathcal{E}$ in der schwach-$*$-Topologie kompakt ist. Das könnten wir benutzen, um X in einen kompakten Raum einzubetten.

Das Argument läuft zum Beispiel so, dass man $\mathcal{E}$ in den dank Tikhonow kompakten Raum

$$\mathcal{K} := \prod_{f \in \mathcal{A}} K_f, \quad K_f := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|f\|\}$$

einbettet und nachweist, dass das ein Homöomorphismus aufs Bild ist, und dass das Bild abgeschlossen ist.

Anstatt dies zu tun, argumentieren wir direkter.

Hilfssatz 2.5.9 Ein Homöomorphismus

Es seien X ein normaler topologischer Raum, $\mathcal{A} := \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ und $\mathcal{K}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \forall f \in \mathcal{A} : |\phi(f)| \leq \|f\|.$$

Das heißt:

$$\mathcal{K} := \prod_{f \in \mathcal{A}} K_f, \quad K_f := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |f|\}$$

Wir versehen $\mathcal{K}$ mit der Produkttopologie. Wegen Tikhonow ist dann $\mathcal{K}$ kompakt.

Weiter sei

$$\Lambda : X \longrightarrow \mathcal{K},\ \Lambda(x) := (f(x))_{f\in\mathcal{A}}$$

Dann ist Λ *ein Homöomorphismus von* X *auf* $\Lambda(X)$.

Der Abschluss des Bildes von Λ *in* $\mathcal{K}$ *besteht aus* $\mathbb{C}$*-linearen Ringhomomorphismen von* $\mathcal{A}$ *nach* $\mathbb{C}$.

Beweis. Zum Nachweis der Stetigkeit von Λ muss man nur zeigen, dass die Urbilder von offenen Mengen aus der Standard-Subbasis der Topologie von $\mathcal{K}$ offen sind. Solch eine offene Menge ist immer von der Gestalt

$$S(f, U), \quad f \in \mathcal{A} \text{ fest},\ U \subseteq K_f \text{ offen}.$$

Das Urbild von $S(f, U)$ unter Λ ist offensichtlich

$$\Lambda^{-1}(S(f, U)) = \{x \in X \mid f(x) \in U\}.$$

Dies ist offen in X, da f stetig ist.

Die Injektivität von Λ folgt aus dem Lemma von Urysohn, denn wenn $x \neq y$ zwei verschiedene Elemente in X sind, dann gibt es eine stetige Funktion $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) = 0, f(y) = 1$. Also unterscheiden sich $\Lambda(x)$ und $\Lambda(y)$ an dieser Stelle f.

Zum Nachweis der Offenheit von f muss man wegen der Injektivität für offenes $V \subseteq X$ nur noch zeigen: für alle $y \in V$ gibt es eine offene Umgebung U von $\Lambda(y)$ in $\mathcal{K}$, sodass für $z \notin V$ gilt, dass $\Lambda(z) \notin U$.

Das machen wir so: $B := X \smallsetminus V$ ist abgeschlossen und disjunkt zur abgeschlossenen Menge $\{y\} \subseteq X$. Nach dem Satz von Urysohn gibt es also eine stetige Funktion f_y auf X, sodass $f_y(y) = 0$ und $f_y|_B = 1$. Daher liegt für $z \in B$ die Abbildung $\Lambda(z)$ nicht in

$$S(f_y, B_{\frac{1}{2}}(0)).$$

Wenn ζ im Abschluss von $\Lambda(X)$ liegt, dann gilt für jede offene Umgebung von ζ, dass sie mit $\Lambda(X)$ nichtleeren Schnitt hat.

Es seien $g, h \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$. Dann betrachten wir die Umgebung U von ζ, die durch Schnitt von drei offenen Mengen aus unserer Subbasis gegeben ist, und die so definiert wird:

$$U := \{(w) \in \mathcal{K} \mid |w(h) - \zeta(h)| < \varepsilon, |w(g) - \zeta(g)| < \varepsilon, |w(f + g) - \zeta(f + g)| < \varepsilon\}.$$

Auch in U liegt ein $\Lambda(x)$, und es folgt (mit $w = \Lambda(x)$) unter Ausnutzung der Dreiecksungleichung

$$|\zeta(g + h) - \zeta(g) - \zeta(h)| \leq |(g + h)(x) - g(x) - h(x)| + 3\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Da dies für alle ε gilt, folgt

$$\zeta(g+h) = \zeta(g) + \zeta(h).$$

Dies gilt für alle $g, h \in \mathcal{A}$.

Analog zeigt man auch die Homogenität und die Multiplikativität von ζ, und auch $\zeta(1) = 1$ folgt so. ◯

Bemerkung 2.5.10 Eine Kompaktifizierung

a) Es sei X ein normaler Raum.

Den Abschluss von $\Lambda(X)$ aus dem vorherigen Satz nennt man die Stone-Čech[18]-Kompaktifizierung von X.

Man kann sogar zeigen, dass sie gleich $\mathrm{mSpec}(\mathcal{A})$ ist, wenn man die maximalen Ideale von $\mathcal{A}$ mit den durch sie definierten $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathbb{C}$ identifiziert. Hierfür braucht man noch den Satz von Gelfand[19]-Mazur[20], der im Wesentlichen sagt, dass das geht. Wir wollen dies hier nicht vorführen.

Insbesondere sollte man sich die Stone-Čech-Kompaktifizierung als Teilraum von $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})'$ denken – mit der schwach-$*$-Topologie natürlich.

b) Nun sei Y ein kompakter Raum und $\varphi : X \longrightarrow Y$ stetig. Die Komposition mit φ liefert einen Algebren-Homomorphismus

$$\Phi : \mathcal{C}_0(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}), \quad \Phi(f) := f \circ \varphi.$$

Weil hierbei die Norm von $\Phi(f)$ höchstens so groß ist wie die Norm von f, ist die zu Φ duale Abbildung

$$\Phi^* : \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})' \longrightarrow \mathcal{C}_0(Y, \mathbb{C})', \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \Phi,$$

wohldefiniert (also $\lambda \circ \Phi$ stetig; „linear“ wissen wir aus der LA).

Die Abbildung Φ^* kann man nun benutzen, um die Abbildung φ zu einer Abbildung zwischen den Stone-Čech-Kompaktifizierungen fortzusetzen.

Ist hierbei Y auch normal, so ist wegen 2.5.7 die Stone-Čech-Kompaktifizierung von Y wieder „gleich“ Y. Das aber heißt: wir können φ zu einer stetigen Abbildung von der Kompaktifizierung von X nach Y fortsetzen.

c) Wenn R ein kommutativer Ring (mit Einselement) ist, dann besitzt auch er ein Maximalspektrum. Allerdings gilt nicht für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ zwischen kommutativen Ringen, dass das Urbild eines maximalen Ideals in S stets ein maximales Ideal in R wäre. Der Satz von Gelfand-Mazur

[18] Eduard Čech, 1893-1960

[19] Israel Moisejwitsch Gelfand, 1913-

[20] Stanislaw Mazur, 1905-1981

stellt dies für Algebrenhomomorphismen zwischen komplexen, kommutativen Banachalgebren sicher.

Um in der allgemeinen Situation etwas vergleichbares zu erhalten, betrachtet man einen größeren Raum als das Maximalspektrum: das Spektrum. Hierbei ist das Spektrum $\mathrm{Spec}(R)$ eines kommutativen Rings R die Menge seiner Primideale.

Ein Ideal $P \subseteq R$ heißt ein *Primideal*, wenn gilt:

$$P \neq R \quad \text{und} \quad \forall a, b \in R : ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ oder } b \in P.$$

Man rechnet leicht nach, dass für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : R \longrightarrow S$ und jedes Primideal $Q \subseteq S$ das Urbild $\varphi^{-1}(Q) \subseteq R$ ein Primideal ist. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Spec}(Q) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R).$$

Nun wollen wir natürlich auf den Spektren der Ringe auch eine Topologie haben. Man benutzt hierbei die *Zariski*[21]*-Topologie*, die vorschreibt, dass die abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(R)$ gerade die Mengen der Gestalt

$$V(M) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid M \subseteq P\}, \quad M \subseteq R,$$

sind. Man sieht schnell, dass dies eine Topologie ist,

Und dann ergibt sich tatsächlich ein kleines Wunder: Wenn $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Homomorphismus von kommutativen Ringen ist, dann ist die zugehörigen Abbildung $\Phi : \mathrm{Spec}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$, $\Phi(Q) = \varphi^{-1}(Q)$, stetig.

Die Umkehrung gilt hier nicht: nicht jede stetige Abbildung zwischen den Spektren kommt automatisch von einem Ringhomomorphismus her. Dazu braucht man eine weitere Zutat, die hier nicht ausgeführt werden kann, man muss hier den topologischen Raum zu einem (affinen) Schema aufbohren.

Allerdings ist die Zariski-Topologie zumeist nicht hausdorffsch und überhaupt sehr grob. Für manche Zwecke muss man dann den Begriff einer Topologie konzeptionell neu fassen und betritt eine ganz neue Welt. Viele maßgebliche Ideen in diesem Kontext entstammen Grothendiecks[22] Feder.

Viele der neueren Resultate in der arithmetischen Geometrie wären ohne diese Methoden bisher nicht möglich, zum Beispiel der Beweis der Fermat[23]schen Vermutung durch Wiles[24].

[21] Oscar Zariski, 1899-1986
[22] Alexander Grothendieck, 1928-
[23] Pierre de Fermat, 1601-1665
[24] Andrew Wiles, 1953-

Kapitel 3

Homotopie

3.1 Homotope Abbildungen

Definition 3.1.1 Homotope Abbildungen

a) Es seien X, Y topologische Räume und $f, g : X \longrightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. Weiter sei ab jetzt $I = [0,1]$ das Einheitsintervall.

Dann heißen f und g *homotop*, falls es eine stetige Abbildung

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

gibt mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X : H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x).$$

Die Abbildung H heißt hierbei eine *Homotopie* zwischen f und g.

Die Heuristik dabei ist, dass sich f und g stetig ineinander deformieren lassen. Insbesondere ist für jedes x die Abbildung

$$I \ni t \mapsto H(x,t)$$

eine stetiger Weg von $f(x)$ nach $g(x)$. Das heißt auch, dass die Wegzusammenhangskomponenten von Y ein große Rolle spielen.

b) Auf $\mathcal{C}(X,Y)$ wird meistens die *kompakt-offene* Topologie betrachtet. Sie hat als Subbasis die Mengen

$$\{f : X \longrightarrow Y \mid f(K) \subseteq U\},$$

wobei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen ist.

c) X heißt *lokal kompakt*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung hat, die in einem Kompaktum enthalten ist.

d) Ist X lokal kompakt und hausdorffsch, so ist eine Homotopie $H : X \times I \longrightarrow Y$ nichts anderes als ein stetiger Weg $I \ni t \mapsto H_t = [X \ni x \mapsto H(x,t) \in Y] \in \mathcal{C}(X,Y)$, der $H_0 = f$ mit $H_1 = g$ verbindet.

Bemerkung 3.1.2 Äquivalenzrelation

Wenn X, Y zwei topologische Räume sind, so ist die Eigenschaft, homotop zu sein, eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}(X,Y)$.

Symmetrie und Reflexivität sind klar. Für die Transitivität seien f, g, h stetige Abbildungen von X nach Y, H sei eine Homotopie zwischen f und g, und K eine Homotopie zwischen g und h. Wir definieren

$$L : X \times I \longrightarrow Y, L(x,t) := \begin{cases} H(x,2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ K(x, 2t-1) & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Dann ist L stetig (das muss man offensichtlich nur für $t = \frac{1}{2}$ ernsthaft prüfen) und eine Homotopie zwischen f und h.

Wir notieren die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y mit $[X, Y]$.

Definition 3.1.3 Verknüpfung von Klassen

Nun seien $f, g : X \longrightarrow Y$ und $k, l : Y \longrightarrow Z$ zwei Paare homotoper Abbildungen. Dann sind auch $k \circ f$ und $l \circ g$ homotop. Wenn $H : X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g ist und $M : Y \times I \longrightarrow Z$ eine Homotopie von k nach l, dann findet sich in

$$N : X \times I \longrightarrow Z, N(x,t) := M(H(x,t), t),$$

eine Homotopie von $k \circ f$ nach $l \circ g$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Verknüpfung

$$[Y, Z] \times [X, Y] \longrightarrow [X, Z], ([k], [f]) \mapsto [k \circ f].$$

Diese Verknüpfung ist natürlich assoziativ (das stimmt ja schon für die Komposition der Vertreter), und es gibt in $[X, X]$ immer ein neutrales Element, nämlich die Homotopieklasse der Identität.

Das heißt: die Klasse der topologischen Räume, ausgestattet mit den Homotopieklassen stetiger Abbildungen, ist eine Kategorie. Diesen Begriff werden wir hier nicht weiter beleuchten, er spielt aber im Hintergrund eine wesentliche Rolle bei allem, was hier passiert.

Definition 3.1.4 Homotopieäquivalenz, Kontrahierbarkeit

a) Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent,* wenn es stetige Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$, gibt, sodass $g \circ f$ zur Identität auf X und $f \circ g$ zur Identität auf Y homotop sind.

Zwei homöomorphe Räume sind offensichtlich homotopieäquivalent. Von daher handelt es sich also um eine Abschwächung dessen, was einen Topologen zunächst interessieren sollte.

Homotopieäquivalenz ist der Isomorphiebegriff in der Homotopiekategorie.

b) Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar*, falls ein Punkt $x_0 \in X$ existiert, sodass $f = \mathrm{Id}_X$ und $g : X \ni y \mapsto x_0 \in X$ zueinander homotop sind, wenn es also eine Abbildung

$$H : x \times I \longrightarrow X$$

gibt mit $H(x, 0) = x, H(x, 1) = x_0$ für alle $x \in X$.

Das heißt nichts anderes, als dass X zu $\{x_0\}$ homotopieäquivalent ist.

Ein kontrahierbarer Raum ist insbesondere wegzusammenhängend.

Allerdings ist nicht jeder wegzusammenhängende Raum automatisch kontrahierbar, was diesem neuen Begriff eine gewisse Existenzberechtigung verleiht.

Beispiel 3.1.5 Konvexität, Sterngebiete, die Sphäre

a) Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält.

b) Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls ein $x_0 \in S$ existiert, sodass für alle $x \in S$ auch die Verbindungsstrecke von x_0 nach x zu S gehört.

   Jede konvexe Menge ist sternförmig. Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend.

   Ist S offen und sternförmig, so nennt man es ein *Sterngebiet*. In der Funktionentheorie ist dies ein wichtiger Begriff.

c) Jede sternförmige Menge ist kontrahierbar. Als Homotopie verwenden wir hier die Abbildung

$$H(x, T) := x_0 + (1 - t) \cdot (x - x_0), \quad x \in S, t \in [0, 1].$$

   Tatsächlich landet diese Abbildung in S, sie ist stetig und erfüllt

$$H(x, 0) = x, H(x, 1) = x_0.$$

d) Jeder zu einer kontrahierbaren Menge homöomorphe Raum ist ebenfalls kontrahierbar.

e) Nicht kontrahierbar ist zum Beispiel die eindimensionale Sphäre

$$S^1 := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}.$$

Hätte man nämlich eine Kontraktion

$$H : S^1 \times I \longrightarrow S^1, H|_{S^1\times\{0\}} = \mathrm{id}_{S^1},\ H|_{S^1\times\{1\}} = const.$$

so könnte man unter Benutzung der Methoden und der Notation von 2.4.14 eine stetige Abbildung

$$\widetilde{H} : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$$

angeben, die für alle $t \in [0,1]$ die Gleichung

$$\pi(\widetilde{H}(x,t)) = H((\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)), t)$$

erfüllt.

Wieder wäre dann $t \mapsto \widetilde{H}(1,t) - \widetilde{H}(0,t)$ stetig auf $[0,1]$ mit ganzzahligen Werten, also konstant, was den Randbedingungen der Kontraktion widerspricht.

Hilfssatz 3.1.6 Alles trivial

Es seien X, Y topologische Räume und Y sei kontrahierbar. Weiter sei $y_0 \in Y$ beliebig.

Dann ist jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $g : X \longrightarrow \{y_0\} \subseteq Y$.

Beweis. Es gibt eine Homotopie $H : Y \times I \longrightarrow Y$ zwischen der Identität und einer konstanten Abbildung h. Da das impliziert, dass Y wegzusammenhängend ist, gibt es auch einen stetigen Weg

$$\gamma : I \longrightarrow Y, \gamma(0) = h(y_0), \gamma(1) = y_0.$$

Diesen blasen wir zu einer Homotopie auf:

$$K : Y \times I \longrightarrow Y, K(y,t) := \gamma(t).$$

Das zeigt wegen der Transitivität der Homotopie, dass die Identität zur konstanten Abbildung mit Wert y_0 homotop ist. Sei L eine solche Homotopie. Dann ist

$$\widetilde{L} : X \times I \longrightarrow Y, \widetilde{L}(x,t) := L(f(x),t),$$

eine Homotopie zwischen f und der konstanten Abbildung mit Wert y_0. ○

Bemerkung 3.1.7 nullhomotop

a) Eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *nullhomotop* oder auch *unwesentlich*, wenn sie zu einer konstanten Abbildung homotop ist.

b) Als Beispiel hierfür nennen wir einen stetigen Weg $\sigma : I \longrightarrow Y$.

Eine Homotopie von σ zu einem „konstanten Weg" ist zum Beispiel

$$H : I \times I \longrightarrow Y,\ H(u,t) = \sigma((1-t)u).$$

In gewisser Weise legt das nahe, dass Homotopie in unserem bisherigen Sinn zu beliebig ist.

c) Es sei wieder $\sigma : I \longrightarrow Y$ ein stetiger Weg. Dann ist

$$\nu : I \longrightarrow Y, \quad \nu(u) := \begin{cases} \sigma(2u) & 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ \sigma(-2u+2) & \frac{1}{2} < u \le 1, \end{cases}$$

ein stetiger Weg, der beim selben Punkt aufhört, wo er anfängt. Diese spezielle Art geschlossener Wege ist in einem schärferen Sinn nullhomotop, als es für jeden Weg ohnehin gilt. Es gibt nämlich sogar eine Homotopie

$$H : I \times I \longrightarrow Y$$

zum konstanten Weg $\kappa(u) = \nu(0) = \nu(1)$, die zu jedem „Zeitpunkt" $t \in I$ die Randbedingung

$$H(0,t) = H(1,t) = \nu(0)$$

erfüllt. Die Homotopie hält in gewissem Sinn den Anfangs- und Endpunkt des Weges fest.

Dieses Phänomen wird später noch eine Rolle spielen und zunächst in einem allgemeineren Konzept festgehalten.

Definition 3.1.8 Alles relativ

a) Ein *topologisches Paar* ist ein Paar (X,A), wobei X ein topologischer Raum und A eine Teilmenge von X sind.

Es seien (X,A) und (Y,B) zwei topologische Paare. Eine stetige Abbildung $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ ist definiert als stetige Abbildung von X nach Y mit der Zusatzeigenschaft $f(A) \subseteq B$.

Ist $X' \subseteq X$ eine (weitere) Teilmenge von X, so heißen zwei stetige Abbildungen

$$f, g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$$

homotop relativ zu X', falls es eine Homotopie H von f nach g im Sinne der alten Definition gibt, die zusätzlich auf X' konstant ist:

$$\forall t \in I, x \in X' : H(x,t) = f(x).$$

Das erzwingt natürlich, dass f und g auf X' übereinstimmen.

Ist (Z, C) ein drittes topologisches Paar, und sind $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ sowie $k, l : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$ homotop relativ zu $X' \subseteq X$ und $Y' \subseteq Y$, wobei $f(X') \subseteq Y'$ gilt, dann sind auch $k \circ f$ und $l \circ g$ homotop relativ zu X'. Der Beweis geht genauso wie in 3.1.3.

Wir erhalten also eine neue Kategorie, die Homotopiekategorie der topologischen Paare (X, A) relativ zu $X' \subseteq X$. Die Objekte sind also Tripel $(X, A; X')$, Morphismen sind Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, wobei $f(X') \subseteq Y'$ gilt und die Homotopie relativ zu X' genommen wird.

Dies ist die Situation, in der allgemein die Homotopietheorie entwickelt wird. Wir sind aber an dem folgenden wichtigen Spezialfall interessiert, in dem alles etwas überschaubarer ist.

b) Ein *punktierter Raum* ist ein topologischer Raum X mit einem ausgezeichneten Punkt x_0, man kann ihn mit dem topologischen Paar $(X, \{x_0\})$ identifizieren.

Die Topologen lieben es, den ausgezeichneten Punkt immer $*$ zu nennen, und wir wollen uns dies auch nicht versagen. Schließlich heißt ein Nullelement ja auch immer 0…

Eine stetige Abbildung $f : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ ist definitionsgemäß eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(*) = *$.

Wir werden jetzt meistens Homotopien zwischen zwei solchen Abbildungen relativ zu $\{*\}$ betrachten, also Homotopien der Form

$$H : X \times I \longrightarrow Y, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x), H(*, t) = *.$$

Diese Homotopien halten also den fest gewählten Bezugspunkt $*$ fest.

Wir erhalten damit die Homotopiekategorie der punktierten Räume. Die Objekte sind Paare $(X, *)$, die Morphismen sind relative Homotopieklassen von stetigen Abbildungen zwischen den punktierten Räumen.

c) Als Beispiele hierfür nennen wir noch einmal den Weg ν aus Punkt c) der letzten Bemerkung. Hier ist H eine Homotopie relativ zum Rand des Intervalls I.

Ein anderes Beispiel ist das folgende. Wieder sei $I = [0, 1]$ und $\gamma : I \longrightarrow Y$ ein stetiger Weg.

Weiter sei $p : I \longrightarrow I$ eine stetige Abbildung mit $p(0) = 0, p(1) = 1$.

Dann sind γ und $\gamma \circ p$ homotop relativ zum Rand von I.

Denn eine zugehörige Homotopie findet sich zum Beispiel in

$$H(u, t) := \gamma((1 - t)u + t \cdot p(u)).$$

Auch diese Homotopie wird bei der Konstruktion der Fundamentalgruppe eine Rolle spielen.

Nachdem wir nun den allgemeinen Rahmen abgesteckt haben, widmen wir uns einer wichtigen Klasse von Beispielen. Dafür lohnt es sich, einen neuen Abschnitt zu beginnen.

3.2 Fundamentalgruppen

Definition 3.2.1 Sphärenklänge

a) Die n-dimensionale Sphäre S^n ist ab jetzt immer

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x^\top \cdot x = 1\}.$$

Wir punktieren sie durch Auszeichnung des Punktes $* = (1, 0, \ldots, 0)^\top$.

b) Für einen punktierten topologischen Raum $(X, *)$ heißt

$$\pi_n(X, *) := [(S^n, *), (X, *),]$$

die *n-te Homotopiemenge*. Oft wird in der Notation der Punkt $*$ unterdrückt, aber im Allgemeinen tut man sich und ihm damit keinen Gefallen.

Bemerkung 3.2.2 $n = 0$

Für $n = 0$ ist $S^0 = \{-1, +1\}$. Eine stetige Abbildung von S^0 nach $(X, *)$ ist einfach die Vorgabe des Punktes $x = f(-1)$; schließlich muss 1 ja auf $*$ abgebildet werden.

Eine Homotopie zwischen zwei solchen Abbildungen f, g, die noch dazu relativ zu $\{1\}$ ist, ist ein paar stetiger Wege $H(1, t) = *$ und $H(-1, t)$, wobei $H(-1, 0) = f(-1)$ und $H(-1, 1) = g(-1)$.

Alles in allem stellt sich damit heraus, dass es eine sehr naheliegende Identifizierung zwischen $\pi_0(X, *)$ und den Wegzusammenhangskomponenten von X gibt. Eine von diesen Wegzusammenhangskomponenten ist (künstlich) dadurch ausgezeichnet, dass sie $*$ enthält. Dadurch wird $\pi_0(X, *)$ zu einer punktierten Menge.

Bemerkung 3.2.3 Eine Verknüpfung

a) Zunächst bemerken wir, dass wir mithilfe der stetigen und surjektiven Abbildung $\pi : I \longrightarrow S^1, \pi(u) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u)$, die eindimensionale Sphäre als Quotientenraum von I erhalten – wirklich mit der Quotiententoplgie, denn I ist ja kompakt und beide Räume sind hausdorffsch, und daher ist π abgeschlossen...

Eine stetige Abbildung $f : S^1 \longrightarrow X$ ist also nichts anderes, als eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : I \longrightarrow X$ mit $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1)$.

Eine relative Homotopie zweier solcher Abbildungen von S^1 nach X bezüglich $(1,0)$ ist nichts anderes, als eine relative Homotopie zweier geschlängelter Abbildungen relativ zu $\partial I = \{0,1\} \subseteq I$.

Wir können also $\pi_1(X,*) := [(S^1,*),(X,*)]$ auch mit $[(I,\partial I),(X,*)]$ identifizieren, wobei hier die Homotopieklassen relativ zu ∂I genommen werden.

Nun seien $\gamma, \delta : (I,\partial I) \longrightarrow (X,*)$ zwei solche geschlossenen Kurven. Wir verketten sie nun zu einer neuen geschlossenen Kurve

$$\delta \bullet \gamma : (I,\partial I) \longrightarrow (X,*), \quad \delta \bullet \gamma(u) := \begin{cases} \delta(2u) & \text{, falls } 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ \gamma(2u-1) & \text{, falls } \frac{1}{2} < u \le 1. \end{cases}$$

Hierbei nutzen wir aus, dass $\delta(1) = \gamma(0)$, und das ist letztlich für die Stetigkeit an der Nahtstelle $u = \frac{1}{2}$ verantwortlich.

Dummer Weise ist im Allgemeinen diese Verknüpfungen weder assoziativ, noch gibt es ein neutrales Element. Das ändert sich beim Übergang zu den Homotopieklassen.

Man sollte hier (und kann jetzt leicht) nachrechnen, dass durch $\bullet$ tatsächlich eine Verknüpfung auf den Homotopieklassen geschlossener Wege gegeben wird:

Sind $\gamma, \widetilde{\gamma}, \delta, \widetilde{\delta}$ vier geschlossene Wege, die bei $*$ anfangen und sodass γ zu $\widetilde{\gamma}$ und δ zu $\widetilde{\delta}$ homotop sind, so sei H eine Homotopie (relativ zu ∂I) von γ zu $\widetilde{\gamma}$ und K eine Homotopie von δ zu $\widetilde{\delta}$.

Dann ist

$$(H \bullet K)(u,t) := \begin{cases} H(2u,t) & \text{falls } 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ K(2u-1,t) & \text{falls } \frac{1}{2} < u \le 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $\gamma \bullet \delta$ zu $\widetilde{\gamma} \bullet \widetilde{\delta}$.

Hilfssatz 3.2.4 Wieso Gruppe?

Es sei $(X,*)$ ein punktierter topologischer Raum. Dann ist $\pi_1(X,*)$ mit der eben definierten Verknüpfung $\bullet$ eine Gruppe.

Beweis. Zunächst zur Assoziativität. Es seien β, γ, δ stetige Abbildungen von $(I,\partial I)$ nach $(X,*)$.

Dann gilt

$$(\beta \bullet (\gamma \bullet \delta))(u) = \begin{cases} \beta(2u), & \text{falls } 0 \le u \le \frac{1}{2}, \\ \gamma(4u-2), & \text{falls } \frac{1}{2} < u \le \frac{3}{4}, \\ \delta(4u-3), & \text{falls } \frac{3}{4} < u \le 1, \end{cases}$$

und

$$((\beta \bullet \gamma) \bullet \delta)(u) = \begin{cases} \beta(4u), & \text{falls } 0 \le u \le \frac{1}{4}, \\ \gamma(4u-1), & \text{falls } \frac{1}{4} < u \le \frac{1}{2}, \\ \delta(2u-1), & \text{falls } \frac{1}{2} < u \le 1, \end{cases}$$

Das zeigt, dass für

$$p : I \longrightarrow I, \quad p(u) := \begin{cases} 2u, & \text{falls } 0 \leq u \leq \frac{1}{4}, \\ u + \frac{1}{4}, & \text{falls } \frac{1}{4} < u \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}, & \text{falls } \frac{1}{2} < u \leq 1 \end{cases}$$

die Gleichung

$$(\beta \bullet (\gamma \bullet \delta)) = ((\beta \bullet \gamma) \bullet \delta) \circ p$$

gilt. Mit der Einsicht aus 3.1.8 c) sehen wir also die gewünschte Homotopie der beiden verschiedenen Verknüpfungsmöglichkeiten.

Die Klasse der konstanten Kurve $\gamma(z) = *$ ist offensichtlich ein neutrales Element für $\bullet$, denn zum Beispiel gilt für die geschlossene Kurve $\delta : (I, \{0,1\}) \longrightarrow (X, *)$ die Gleichheit $\delta \bullet \gamma = \delta \circ p$ für die Abbildung

$$p : I \longrightarrow I, p(u) = \begin{cases} 2u, & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases}$$

Wieder können wir uns auf 3.1.8 c) berufen. Ähnlich findet man eine Homotopie zwischen δ und $\gamma \bullet \delta$.

Schließlich rechnet man nach, dass zur geschlossenen Kurve δ stets eine inverse Homotopieklasse gehört, nämlich die der Kurve

$$\delta^- : I \longrightarrow X, \delta^-(x) := \delta(1 - x).$$

Diese Kurve dreht die Richtung von δ einfach um. Setzt man in 3.1.7c) $\sigma = \delta$, so zeigt die Rechnung dort, dass $\nu = \delta \bullet \delta^-$ nullhomotop relativ zu ∂I ist, und genauso auch $\delta^- \bullet \delta$. Also liegen diese Produkte in der Klasse der konstanten Kurve, die das neutrale Element ist. ○

Definition 3.2.5 Fundamentalgruppe

Die Menge $\pi_1(X, *)$ mit der Verknüpfung $\bullet$ heißt die *Fundamentalgruppe* des punktierten Raums $(X, *)$.

Wir werden in Zukunft für einen Weg $\sigma : I \to X$ den *inversen Weg* $\overleftarrow{\sigma}$ durch $u \mapsto \sigma(1 - u)$ definieren. Hierbei bezieht sich „invers“ darauf, dass $\sigma \bullet \overleftarrow{\sigma}$ das neutrale Element in $\pi_1(X, \sigma(0))$ und $\overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma$ das neutrale Element in $\pi_1(X, \sigma(1))$ repräsentieren.

Die „Zuordnung“ π_1, die jedem punktierten topologischen Raum eine Gruppe zuordnet, wird umso wichtiger, wenn man das folgende einsieht:

Hilfssatz 3.2.6 Funktorialität

Es seien $(X, *)$ und $(Y, *)$ zwei punktierte Räume.

Ist $f : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ *stetig, so induziert* f *vermöge der Vorschrift*

$$\gamma \mapsto f \circ \gamma$$

einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, *) \longrightarrow \pi_1(Y, *).$$

Dieser Gruppenhomomorphismus ist durch die Homotopieklasse von f *festgelegt.*

Es gilt $\pi_1(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,*)}$.

Ist weiter $(Z, *)$ *ein dritter punktierter topologischer Raum und* $k : (Y, *) \longrightarrow (Z, *)$ *stetig, so gilt*

$$\pi_1(k \circ f) = \pi_1(k) \circ \pi_1(f).$$

Beweis. Wenn γ und δ zwei Repräsentanten von Elementen in $\pi_1(X, *)$ sind, so gilt offensichtlich

$$f \circ (\delta \bullet \gamma) = (f \circ \delta) \bullet (f \circ \gamma).$$

Wegen 3.1.3 liefert dies die gewünschte Homomorphieeigenschaft für die Fundamentalgruppen. (Das Argument dort bleibt in der relativen Situation gültig.)

Derselbe Verweis zeigt, dass zwei homotope Abbildungen f, g denselben Gruppenhomomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen induzieren.

Die restlichen Aussagen sind unmittelbare Konsequenzen der Definition von π_1. $\bigcirc$

Bemerkung 3.2.7 Konsequenzen

Wenn $f : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ ein Homöomorphismus ist (es langt auch schon Homotopieäquivalenz), so ist $\pi_1(f)$ ein Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen. Das zeigt, das $\pi_1(X, *)$ eine Invariante ist, mit der sich bisweilen verschiedene Räume unterscheiden lassen.

Allgemeiner ist ein Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen ein Vorschrift $\mathcal{F}$, die jedem topologischen Raum X eine Gruppe $\mathcal{F}(X)$ zuordnet, und jeder stetigen Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{F}(f)$, sodass $\mathcal{F}(k \circ f) = \mathcal{F}(k) \circ \mathcal{F}(f)$ und $\mathcal{F}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}$.

Die einzigen Funktoren, die sich erfahrungsgemäß sinnvoll berechnen lassen, merken hierbei nur die Räume und Abbildungen bis auf Homotopieäquivalenz.

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ zur $n-1$-dimensionalen Sphäre homotopieäquivalent vermöge der Inklusion $\iota : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und der Normierungsabbildung $N : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$.

Eine Homotopie zwischen diesen Abbildungen ist etwa

$$H : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times I \to S^{n-1}, H(x,t) := (1-t)x + t\frac{x}{|x|}.$$

Damit sieht man dann ein, dass der $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 3$ nicht zu $\mathbb{R}^2$ homöomorph sein kann.

Wäre nämlich $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus, so wäre die Einschränkung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$$

auch ein Homöomorphismus, und damit wären die 1-Sphäre und die $(n-1)$-Sphäre homotopieäquivalent. Aber S^1 hat als Fundamentalgruppe gerade $\mathbb{Z}$ - das folgt schnell aus unseren Überlegungen zur Umlaufzahl in 2.4.14. Dagegen ist jeder geschlossene Weg in S^{n-1} für $n \geq 3$ nullhomotop - wir werden in 3.2.12 noch sehen, dass die Fundamentalgruppe trivial ist.

Nun wollen wir uns von der Wahl des Basispunkts soweit unabhängig machen, wie es geht.

Um das schön aufschreiben zu können definieren wir für zwei Wege $\gamma, \delta : I \to X$ mit $\gamma(1) = \delta(0)$ den neuen Weg

$$\gamma \bullet \delta : I \to X, u \mapsto \begin{cases} \gamma(2u), & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(2u-1), & \frac{1}{2} < u \leq 1. \end{cases}$$

Wie vorher überlegt man sich, dass diese Verknüpfung eine schöne Verknüpfung auf den Homotopieklassen von Wegen (relativ zu $\{0,1\} \subseteq I$) mit passenden Anfangs- und Endpunkten liefert.

Hilfssatz 3.2.8 zwei Punkte wohnen ach in meinem Raum

Es seien X ein topologischer Raum und x_0, x_1 zwei Punkte in X. Weiter sei $\sigma : I \longrightarrow X$ ein stetiger Weg mit $\sigma(0) = x_0$ und $\sigma(1) = x_1$.

Für einen Weg $\gamma : (I, \partial I) \longrightarrow (X, x_1)$ setzen wir

$$\Phi([\gamma]) := [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma}] \in \pi_1(X, x_0).$$

Dabei ist $\overleftarrow{\sigma}$ wie in 3.2.5 definiert.

Dann ist Φ eine Gruppenisomorphismus von $\pi_1(X, x_1)$ nach $\pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Natürlich ist Φ eine Abbildung zwischen den angegebenen Fundamentalgruppen. Wir müssen die Homomorphieeigenschaft zeigen. Dazu seien γ, δ zwei Wege mit Anfangs- und Endpunkt in x_1. Dazu erinnern wir uns daran, dass der konstante Weg $\nu : I \to \{x_1\} \subseteq X$ das neutrale Element in $\pi_1(X, x_1)$ repräsentiert, und dass er homotop ist zu $\overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma$

$$\begin{aligned} \Phi([\gamma \bullet \delta) &= \Phi([\gamma] \bullet [\delta]) \\ &= \Phi([\gamma] \bullet [\nu] \bullet [\delta]) \\ &= [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma} \bullet \sigma \bullet \delta \bullet \overleftarrow{\sigma}] \\ &= [\sigma \bullet \gamma \bullet \overleftarrow{\sigma}] \bullet [\sigma \bullet \delta \bullet \overleftarrow{\sigma}] \\ &= \Phi([\gamma]) \bullet \Phi([\delta]). \end{aligned}$$

Dieser Homomorphismus ist bijektiv, denn die inverse Abbildung ist natürlich nichts anderes als

$$[\beta] \mapsto [\overleftarrow{\sigma} \bullet \beta \bullet \sigma].$$

○

Definition 3.2.9 einfach zusammenhängend

Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, *)$ die triviale Gruppe ist. Der letzte Hilfssatz sagt uns, dass dies nicht vom Punkt $*$ abhängt.

Definition 3.2.10 Retrakte

a) Es seien $A \subseteq X$ topologische Räume. Dann heißt A ein *Retrakt* von X, wenn die Inklusion $\iota : A \to X$ eine stetige Linksinverse $f : X \to A$, $f \circ \iota = \mathrm{Id}_A$, besitzt.

Dass es eine mengentheoretische Inverse immer gibt, ist klar. Aber die Stetigkeit erzwingt (nach Wahl eines Punktes $* \in A$)

$$\pi_1(f) \circ \pi_1(\iota) = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,*)},$$

also muss insbesondere $\pi_1(\iota$ injektiv und $\pi_1(f)$ surjektiv sein.

Dies ist beispielsweise für $A = S^1, X = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ nicht möglich, denn X ist kontrahierbar und hat damit triviale Fundamentalgruppe, während S^1 als Fundamentalgruppe die Gruppe $\mathbb{Z}$ hat.

Allgemein: Wenn $\pi_1(X, *)$ keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus nach $\pi_1(A, *)$ hat, dann ist A sicher kein Retrakt von X.

b) Ein Retrakt A von X heißt ein *Deformationsretrakt*, wenn die Abbildungen f und ι zueinander (relativ zu A) homotopieinvers sind.

Wegen $f \circ \iota = \mathrm{Id}_A$ und $\iota \circ f(x) = f(x)$ ist die Homotopieinversität äquivalent zur Existenz einer Homotopie

$$H : X \times I \to X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = x, H(a, t) = a,$$

was für alle $x \in X$ und $a \in A$ gelten soll.

Ein Punkt $a \in X$ ist zum Beispiel immer ein Retrakt von X, denn konstante Abbildungen sind stetig. Ein Deformationsretrakt von X ist aber höchstens dann einelementig, wenn X kontrahierbar ist.

Hilfssatz 3.2.11 Die einfache Hälfte von Seifert[1] - van Kampen[2]

Es seien $(X,*)$ ein wegzusammenhängender punktierter Raum. Weiter seien $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von X durch wegzusammenhängende Teilmengen, die alle den Punkt $*$ enthalten, und deren paarweise Schnitte jeweils auch wegzusammenhängend sind.

Für $\lambda \in \Lambda$ sei $f_\lambda : (U_\lambda, *) \to (X,*)$ die Inklusion.

Dann wird $\pi_1(X,*)$ erzeugt von den Untergruppen $\pi_1(f_\lambda)(\pi_1(U_\lambda,*)), \lambda \in \Lambda$.

Beweis.

Es sei $\gamma : (I, \partial I) \to (X,*)$ ein geschlossener Weg. Da I kompakt ist, gibt es zur Überdeckung $(\gamma^{-1}(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ eine Lebesgue[3]-Zahl $\varepsilon > 0$, d.h. es gilt

$$\forall u \in I : \exists \lambda \in \Lambda : B_\varepsilon(u) \cap I \subseteq \gamma^{-1}(U_\lambda).$$

Es sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, für die $\frac{1}{k} < \varepsilon$ gilt, und weiter sei $u_i := \frac{i}{k}, 0 \leq i \leq k$. Wähle für jedes $1 \leq i \leq k$ ein $\lambda_i \in \Lambda$, sodass

$$\gamma([u_{i-1}, u_i]) \subseteq U_{\lambda_i}.$$

Weiter sei

$$\gamma_i : I \to U_{\lambda_i}, u \mapsto \gamma(\frac{u}{k} + u_{i-1}),$$

der zu i gehörende Teilweg von γ. Offensichtlich ist γ zum Produkt

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \ldots \bullet \gamma_k$$

homotop, mit einer Homotopie relativ zu ∂I; streng genommen müsste man hier Klammern einführen, die aber wegen 3.1.8 die Homotopieklasse nicht beeinflussen. Derselbe Verweis zeigt die Homotopie zu γ.

Nun muss man noch dafür sorgen, dass die Wege γ_i hier durch geschlossene Wege in den U_{λ_i} ersetzt werden können. Dazu wählen wir für $1 \leq i \leq k-1$ einen Weg

$$\sigma_i : I \to U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_{i+1}},$$

[1]Karl Johann Herbert Seifert, 1907-1996
[2]Egbert Rudolf van Kampen, 1908-1942
[3]Henri Leon Lebesgue, 1875-1941

der $\sigma_i(0) := \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0) \in U_{\lambda_i} \cap U_{\lambda_{i+1}}$ mit $\sigma_i(1) := *$ verbindet. Genau an dieser Stelle brauchen wir, dass dieser Durchschnitt wegzusammenhängend ist.

Dann ist γ homotop zu

$$\underbrace{\gamma_1 \bullet \sigma_1}_{\text{in } U_1} \bullet \underbrace{\overleftarrow{\sigma}_1 \bullet \gamma_2 \bullet \sigma_2}_{\text{in } U_2} \bullet \overleftarrow{\sigma}_2 \bullet \ldots \bullet \underbrace{\overleftarrow{\sigma}_{k-1} \bullet \gamma_k}_{\text{in } U_k},$$

und dies ist nun ein Produkt von <u>geschlossenen</u> Wegen in den U_{λ_i}.

Für die Fundamentalgruppen gilt nun aber nach Definition von $\pi_1(f_\lambda)$:

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall \delta : (I, \partial I) \to (U_\lambda, *) : [\delta]_X = \pi_1(f_\lambda)([\delta]_{U_\lambda}),$$

wobei $[\cdot]_Y$ die (relative)Homotopieklasse im Raum Y bezeichnet.

Das zeigt, dass

$$\begin{aligned} [\gamma] &= [\gamma_1 \bullet \sigma_1]_X \bullet \ldots \bullet [\overleftarrow{\sigma}_{k-1} \bullet \gamma_k]_X \\ &= \pi_1(f_{U_{\lambda_1}})([\gamma_1 \bullet \sigma_1]_{U_{\lambda_1}}) \bullet \ldots \bullet \pi_1(f_{U_{\lambda_k}})([\overleftarrow{\sigma}_{k-1} \bullet \gamma_k]_{U_{\lambda_k}}). \end{aligned}$$

Das heißt, jede Klasse in $\pi_1(X, *)$ lässt sich wie angegeben als Produkt von Klassen in den Bildern der Homomorphismen $\pi_1(f_\lambda)$ schreiben. ○

Bemerkung 3.2.12 etwas weniger formal

a) Etwas weniger formal sagt dieser Hilfssatz, dass die relativen Homotopieklassen in X von geschlossenen Wegen, die ganz in einem U_λ verlaufen, die Fundamentalgruppe von X erzeugen.

Insbesondere ist X einfach zusammenhängend, wenn jedes U_λ diese Eigenschaft besitzt.

b) Ein **Beispiel** für diesen Sachverhalt ist die n-dimensionale Sphäre S^n, $n \geq 2$. Denn wenn P, Q zwei verschiedene Punkte in S^n sind, dann sind $U_1 := S^n \setminus \{P\}$ und $U_2 := S^n \setminus \{Q\}$ wegzusammenhängend, und ihr Durchschnitt auch (wegen $n \geq 2$).

Nun ist aber $S^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, und zwar vermöge der stereographischen Projektion. Da $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist, gilt dies also auch für U_1 und U_2, und daher haben diese triviale Fundamentalgruppen (egal welchen Fußpunkt man wählt). Daher ist auch $\pi_1(S^n)$ trivial.

Als nächstes wollen wir besser verstehen, wie sich die Fundamentalgruppe von X aus denen der „Bausteine“ U_λ zusammensetzt. Wir beschränken uns auf den Fall $X = U_1 \cup U_2$.

Satz 3.2.13 Seifert - van Kampen

Es seien X ein wegzusammenhängender Raum, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen und wegzusammenhängend, sodass $X = U_1 \cup U_2$ gilt, und $* \in U_3 := U_1 \cap U_2$. Auch U_3 sei wegzusammenhängend. Zu den Inklusionen von U_3 nach U_1, U_2 gehören Homomorphismen

$$\nu_i : \pi_1(U_3, *) \to \pi_1(U_i, *),\ i = 1, 2.$$

Zu den Inklusionen von U_j nach X gehören Homomorphismen

$$\mu_j : \pi_1(U_j, *) \to \pi_1(X, *),\ 1 \le j \le 3.$$

Offensichtlich gilt hierbei $\mu_3 = \mu_i \circ \nu_i,\ i = 1, 2.$

Es seien weiter H eine beliebige Gruppe, und $\rho_j : \pi_1(U_j, *) \to H$ Gruppenhomomorphismen mit der Eigenschaft

$$\rho_3 = \rho_i \circ \nu_i,\ i = 1, 2.$$

Dann gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\rho : \pi_1(X, *) \to H,$ sodass

$$\rho_j = \rho \circ \mu_j,\ 1 \le j \le 3.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von ρ ist klar, denn durch die Gleichung, die erfüllt sein soll, liegt ρ auf den Bildern von μ_1 und μ_2 fest, und diese Bilder erzeugen nach dem letzten Hilfssatz die ganze Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$.

Für die Existenz nehmen wir uns einen geschlossenen Weg $\gamma : (I, \partial I) \to (X, *)$ und schreiben seine Klasse in der Fundamentalgruppe als

$$[\gamma] = [\gamma_1] \bullet \ldots \bullet [\gamma_k],$$

wobei die γ_i alle in U_1 bzw. U_2 laufen. Wenn hierbei γ_i in U_{λ_i} läuft ($\lambda_i = 1$ oder 2), dann definieren wir

$$\rho([\gamma]) := \rho_{\lambda_1}([\gamma_1]_{U_{\lambda_1}}) \cdot \ldots \cdot \rho_{\lambda_k}([\gamma_1]_{U_{\lambda_k}}).$$

Wir werden in den nächsten Hilfssätzen noch sicherstellen, dass das wohldefiniert ist, und dann ist ρ ein Gruppenhomomorphismus, der unsere Anforderungen erfüllt. ◯

Bemerkung 3.2.14 Zur Bedeutung des Satzes

Durch die Eigenschaft von $\pi_1(X, *)$ ist diese Gruppe bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

Um das einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass der einzige Endomorphismus φ von $\pi_1(X, *)$, der die Bedingung

$$\varphi \circ \mu_j = \mu_j,\ 1 \le j \le 3,$$

erfüllt, die Identität ist.

Zum Beweis setzen wir in der Eigenschaft aus dem Satz einfach $H = \pi_1(X,*)$ und $\rho_j = \mu_j$. Dann gibt es genau einen Endomorphismus ρ, der

$$\rho_j = \rho \circ \mu_j,\ 1 \leq j \leq 3$$

erfüllt; die Identität tut dies offensichtlich und die Eindeutigkeit sagt dann $\rho = \mathrm{Id}$.

Wenn nun G eine weitere Gruppe ist, mit Homomorphismen $\psi_j : \pi_1(U_j,*) \to G$, sodass $\psi_i \circ \nu_i = \psi_3, i = 1,2$, und wenn für dieses Datum dieselbe Aussage wie für die Fundamentalgruppe gilt, dann gibt es eindeutige Homorphismen

$$\rho : \pi_1(X,*) \to G,\ \widetilde{\rho} : G \to \pi_1(X,*),$$

sodass

$$\psi_j = \rho \circ \mu_j \text{ und } \mu_j = \widetilde{\rho} \circ \psi_j,\ 1 \leq j \leq 3.$$

Dann ist aber wegen der ersten Einsicht $\widetilde{\rho} \circ \rho$ die Identität auf $\pi_1(X,*)$ und analog ist auch $\rho \circ \widetilde{\rho}$ die Identität auf G.

Damit sind ρ und $\widetilde{\rho}$ zueinander inverse Gruppenhomomorphismen, die Gruppen also isomorph.

Wir werden später noch Beispiele sehen, in denen der Satz tatsächlich hilft, Fundamentalgruppen zu berechnen.

Im Weiteren fixieren wir die Notation des Satzes von Seifert und van Kampen.

Hilfssatz 3.2.15 Ein Spezialfall

Wenn $\gamma : (I, \partial I) \to (U_3, *)$ ein geschlossener Weg ist, dann gilt

$$\rho_1([\gamma]_{U_1}) = \rho_2([\gamma]_{U_2}).$$

Beweis. Die linke Seite ist nach Definition von ν_1 und wegen $\rho_3 = \rho_1 \circ \nu_1$

$$\rho_1([\gamma]_{U_1}) = \rho_1(\nu_1([\gamma]_{U_3})) = \rho_3([\gamma]_{U_3}).$$

Dasselbe gilt mutatis mutandis für die rechte Seite. ○

Hilfssatz 3.2.16 Eine Umklappung

Es seien $Q := I \times I$ und

$$\delta_1 : I \to Q,\quad \delta_1(u) = \begin{cases} (2u, 0) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ (1, 2u-1) & \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

$$\delta_2 : I \to Q,\quad \delta_2(u) = \begin{cases} (0, 2u) & 0 \leq u \leq \frac{1}{2}, \\ (2u-1, 1) & \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \end{cases}$$

zwei Wege von $(0,0)$ nach $(1,1)$.

Dann sind δ_1 und δ_2 homotop relativ zu ∂I.

Beweis. Die Homotopie

$$H(u,t) := (1-t)\delta_1(u) + t\delta_2(u)$$

leistet das Gewünschte. ○

Hilfssatz 3.2.17 Die Hauptlast der Wohldefiniertheit
Es seien $k \in \mathbb{N},\ i_l \in \{1,2\}$ *für* $1 \le l \le k$, *und*

$$\gamma_l : (I, \partial I) \to (U_{i_l}, *),\ 1 \le l \le k,$$

derart dass $\gamma_1 \bullet \ldots \bullet \gamma_k$ *in* $\pi_1(X,*)$ *das neutrale Element repräsentiert.*
Dann gilt in H

$$\rho_{i_1}([\gamma_1]_{U_{i_1}}) \cdot \ldots \cdot \rho_{i_k}([\gamma_k]_{U_{i_k}}) = 1.$$

Beweis. Wir repräsentieren die Homotopieklasse von $\gamma_1 \bullet \ldots \bullet \gamma_k$ durch den Weg

$$\gamma : I \to X,\ \gamma(u) := \gamma_i(ku + 1 - i),\ \frac{i-1}{k} \le u \le \frac{i}{k}.$$

Es gibt eine Homotopie $H : I \times I \to X$ derart, dass für alle $u, t \in I$ die folgenden Aussagen gelten:

$$H(u,0) = \gamma(u),\ H(u,1) = *, H(0,t) = H(1,t) = *$$

Das ist ja gerade eine Homotopie von γ zum konstanten Weg, die relativ zum Rand von I ist.

$H^{-1}(U_1)$ und $H^{-1}(U_2)$ sind offene Mengen, die $I \times I$ überdecken. Wir wählen eine Lebesguezahl $\varepsilon > 0$ für diese Überdeckung. Dann gilt für jedes Paar $(u,t) \in I \times I$, dass $B_\varepsilon((u,t)) \cap I \times I$ ganz in $H^{-1}(U_1)$ oder $H^{-1}(U_2)$ enthalten ist.

Nun sei $m \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von k, sodass $\frac{2}{m^2} < \varepsilon^2$.

Weiter seien für $0 \le i \le m$ die Zahlen $u_i = t_i = \frac{i}{m}$ definiert.

Wir betrachten für $0 \le i, j \le m$ die Punkte $v_{i,j} := (u_i, t_j)$, die Intervalle $J_i := [u_{i-1}, u_i]$, $K_j := [t_{j-1}, t_j]$, die verschobenen Intervalle $a_{i,j} := J_i \times \{t_j\}, b_{i,j} = \{u_i\} \times K_j$ und die dadurch entstehenden Quadrate $R_{i,j} := J_i \times K_j$.

Diese Quadrate pflastern für $1 \le i, j \le m$ das Quadrat $I \times I$, und der Durchmesser eines jeden $R_{i,j}$ ist nach Wahl von m kleiner als ε.

Daher ist $H(R_{i,j})$ ganz in einem $U_{\lambda(i,j)}$ enthalten, wobei wir ab jetzt $\lambda(i,j) \in \{1,2\}$ fest gewählt haben, sodass es diese Bedingung erfüllt.

Schließlich wählen wir noch Wege $\sigma_{i,j}$ von $*$ nach $H(v_{i,j})$, wobei der Weg in U_3 laufen soll, wenn $H(v_{i,j}) \in U_3$, und ansonsten in $U_{\lambda(i,j)}$, das dann ja die einzige Wahl von U_1, U_2, U_3 ist, die $H(v_{i,j})$ enthält.

Im Fall $H(v_{i,j}) = *$ soll $\sigma_{i,j}$ der konstante Weg sein; das brauchen wir später insbesondere für $i \in \{0, m\}$ oder $j = m$.

Jetzt seien

$$A_{i,j}(u) = H(u, t_j), \quad u \in J_i,$$

und

$$B_{i,j}(t) = H(u_i, t), \quad t \in K_j,$$

die Bildkurven von $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$ unter H.

(Spätestens jetzt verabschieden wir uns von der Konvention, Kurven immer durch das Einheitsintervall zu parametrisieren. Wir verwenden die Verknüpfung $\bullet$ auch für anders parametrisierte Wege oder ihre Homotopieklassen in naheliegender Weise.)

Dann sind $\sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}}$ und $\sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}}$ geschlossene Wege, die ganz in $U_{\lambda(i,j)}$ verlaufen. Sowohl $A_{i,j}$ als auch $B_{i,j}$ tun das ohnehin, und bei der Wahl von $\sigma_{i,j}$ waren wir vorsichtig genug: Liegt $H(v_{i,j})$ in U_3, dann laufen wir in U_3 nach $*$ also insbesondere auch in U_2 oder U_1. Liegt $H(v_{i,j})$ in $U_1 \setminus U_2$, so ist $\lambda_{i,j} = 1$, und wir bleiben mit $\sigma_{i,j}$ darin. Analog können wir mit $\sigma_{i,j-1}$ und $\sigma_{i-1,j}$ argumentieren, denn $v_{i,j-1}, v_{i-1,j} \in R_{\lambda(i,j)}$.

Nun sehen wir uns $\alpha_{i,j} := \rho_{\lambda(i,j)}(\sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}})$ und $\beta_{i,j} := \rho_{\lambda(i,j)}(\sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}})$ an.

Die Wege

$$A_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \quad \text{und} \quad B_{i-1,j} \bullet A_{i,j}$$

sind wegen Lemma 3.2.16 homotop (als Bilder von homotopen Wegen in $J_i \times K_j$), und damit sind auch die Wege

$$\sigma_{i-1,j-1} \bullet B_{i-1,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i-1,j}} \bullet \sigma_{i-1,j} \bullet A_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}}$$

und

$$\sigma_{i-1,j-1} \bullet A_{i,j-1} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j-1}} \bullet \sigma_{i,j-1} \bullet B_{i,j} \bullet \overleftarrow{\sigma_{i,j}}$$

homotop. Unter Anwendung von $\rho_{\lambda(i,j)}$ und wegen Lemma 3.2.15 folgt die wichtige Beziehung

$$\alpha_{i,j-1}\beta_{i,j} = \beta_{i-1,j}\alpha_{i,j}.$$

Diese benutzen wir jetzt, um einzusehen, dass für $1 \leq j \leq m$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \dots \alpha_{m-1,j-1}\alpha_{m,j-1} \\
= \; & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \dots \alpha_{m-1,j-1}\alpha_{m,j-1}\beta_{m,j} \\
= \; & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \dots \alpha_{m-1,j-1}\beta_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\
= \; & \alpha_{1,j-1}\alpha_{2,j-1} \dots \beta_{m-2,j}\alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\
= \; & \dots \\
= \; & \beta_{0,j}\alpha_{1,j}\alpha_{2,j} \dots \alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j} \\
= \; & \alpha_{1,j}\alpha_{2,j} \dots \alpha_{m-1,j}\alpha_{m,j}
\end{aligned}$$

Hierbei benutzen wir insbesondere, dass wegen der Wahl der $\sigma_{m,j}$ und $\sigma_{0,j}$, die ja konstant gleich $*$ sind, die Elemente $\beta_{m,j}$ und $\beta_{0,j}$ alle 1 sind.

Das führt letztlich zu

$$\alpha_{1,0} \cdot \alpha_{2,0} \cdot \ldots \cdot \alpha_{m,0} = \alpha_{1,m} \cdot \alpha_{2,m} \cdot \cdots \cdot \alpha_{m,m}.$$

Rechter Hand steht aber 1, da alle beteiligten Wege konstant sind. Linker Hand steht das, wofür wir uns interessieren, denn

$$\gamma_l \simeq A_{(l-1)\frac{m}{k}+1} \bullet \simeq A_{(l-1)\frac{m}{k}+2} \bullet \ldots \bullet A_{l\frac{m}{k}}$$

führt zu

$$\rho_{i_l}([\gamma_l]) = \alpha_{(l-1)\frac{m}{k}+1} \cdot \alpha_{(l-1)\frac{m}{k}+2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{l\frac{m}{k}},$$

denn alle rechts benutzten Wege laufen in U_{i_l}, und so können wir stets – wegen 3.2.15 – ρ_{i_l} zur Bestimmung von $\alpha_{\ldots}$ benutzen, was ein Gruppenhomomorphismus ist. ◯

Bemerkung 3.2.18 Eine Anwendung

a) Wenn $\pi_1(U_3, *)$ trivial ist, dann sagt der Satz von Seifert und van Kampen, dass $\pi_1(X, *)$ das freie Produkt von $\pi_1(U_1, *)$ und $\pi_1(U_2, *)$ ist. Es wird von diesen Gruppen erzeugt, und zwischen den Erzeugern gibt es keine Relationen, die nicht schon in $\pi_1(U_1, *)$ oder $\pi_1(U_2, *)$ zu sehen wären. Insbesondere sind μ_1 und μ_2 injektiv.

b) Eine Anwendung hiervon ist die Fundamentalgruppe eines zusammenhängenden endlichen Graphen, den wir uns als topologischen Raum vorstellen, indem wir jede Kante durch eine Kopie von I ersetzen.

Es sei k die Anzahl der Kanten und e die Anzahl der Ecken des Graphen.

Dann ist der Graph ein Quotientenraum von $I \times \{1, 2, \ldots, k\}$ vermöge einer Abbildung, die das Intervall $I \times \{j\}$ mit der j-ten Kante identifiziert.

Wenn nun eine Kante zwei verschiedene Ecken verbindet, kann man sie kontrahieren, ohne dabei den Homotopietyp des Graphen zu ändern. Das kann man immer und immer wieder machen, bis man – der Graph soll ja endlich und zusammenhängend sein – bei einem Graph mit nur einem Eck ankommt. Da man dabei immer gleichzeitig eine Kante und ein Eck „vernichtet“, ändert sich die Differenz deren Kardinalitäten nicht, und am Ende bleibt ein Graph übrig, der eine Ecke und $k-e+1$ Kanten hat. Das ist der Homotopietyp des alten Graphen, mehr sieht die Homotopie nicht.

c) Was ist dann die Fundamentalgruppe? Wenn G ein Graph mit einer Ecke $*$ und k Kanten $K_1, \ldots, K_k$ ist, dann unterscheiden wir zwei Fälle.

$k = 1$. Hier ist G ein Kreis und hat $\mathbb{Z}$ als Fundamentalgruppe.

$k \geq 2$. Hier überdecken wir G mit folgenden offenen Mengen U_1, U_2. U_1 entstehe aus G durch entfernen eines Punktes $\neq *$ der Kante K_k, und U_2 durch entfernen je eines Punktes $\neq *$ aus den übrigen Kanten $K_1, \ldots, K_{k-1}$. Dann sind $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend. Durch zusammenziehen der beiden Schnipsel von K_k ist U_1 ist homotop zum Graphen mit den Kanten $K_1, \ldots, K_{k-1}$, U_2 homotop zum Graphen mit der Kante K_k und $U_1 \cap U_2$ ist kontrahierbar. Folglich ist $\pi_1(G, *)$ das freie Produkt der Fundamentalgruppe eines Graphen mit einer Ecke und $k-1$ Kanten und der Fundamentalgruppe eines Kreises.

Induktiv zeigt das, dass $\pi_1(G, *)$ eine freie Gruppe in $k - e + 1$ Erzeugern ist. Die Größe $e - k$ heißt die *Eulercharakteristik* des zusammenhängenden Graphen G.

Bemerkung 3.2.19 Mannigfaltigkeiten

a) Wenn $X = \mathbb{R}^2 \setminus D$ für eine diskrete Menge D ist und $* \in X$ ein beliebiger Punkt, dann kann man für jedes $d \in D$ eine geschlossene Kurve

$$\gamma_d : (I, \partial I) \to X$$

kreieren, deren Umlaufzahl um d gleich 1 ist, und die um jeden anderen Punkt aus D Umlaufzahl 0 hat.

Die Homotopieklassen dieser Kurven erzeugen die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, *)$, und die Fundamentalgruppe ist frei in diesen Erzeugern.

b) Ist M hingegen eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension n, so ist die Fundamentalgruppe von M endlich erzeugt.

Ein Argument hierfür geht wie folgt: jeder Punkt von M hat eine Umgebung, die Homöomorph zu einer offenen Kugel vom Radius 1 in $\mathbb{R}^n$ ist.

Überdecke M durch endlich viele solcher Kugeln $U_1, \ldots, U_k$, und glaube dabei, dass es möglich ist, dies so einzurichten, dass die Durchschnitte $U_i \cap U_j$, $1 \leq i, j \leq k$ zusammenhängend sind.

Wähle im Fall $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ einen Punkt $Q_{i,j}$ in diesem Durchschnitt sowie einen Weg $\kappa_{i,j}$ von P_i nach $Q_{i,j}$. Richte dies so ein, dass erstens $Q_{i,j} = Q_{j,i}$ gilt, und dass $Q_{i,i} = P_i$ gilt sowie $\kappa_{i,i}$ konstant ist.

Wähle OBdA $* = P_1$.

Wenn nun $\gamma : (I, \partial I) \to (M*)$ ein Weg ist, so wähle dazu ein $m \in \mathbb{N}$, sodass jede Kurve

$$\gamma_l := \gamma|_{[\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]}, \quad 1 \leq l \leq m,$$

ihr Bild ganz in einem U_{i_l} hat, wobei $i_l \in \{1, \ldots, k\}$.

Da es in bewährter Weise einen Verbindungsweg σ_l von $\gamma(\frac{l}{m})$ nach $Q_{i_l, i_{l+1}}$ gibt, der ganz in $U_{i_l} \cap U_{i_{l+1}}$, verläuft, ist γ homotop zu

$$\gamma_1 \bullet \sigma_1 \bullet \overleftarrow{\sigma_1} \bullet \gamma_2 \bullet \ldots \bullet \overleftarrow{\sigma_{m-1}} \bullet \gamma_m.$$

Da hierbei
$$\overleftarrow{\sigma_{l-1}} \bullet \gamma_l \bullet \sigma_l$$
zum Weg
$$\overleftarrow{\kappa_{i_l,i_{l-1}}} \bullet \kappa_{i_l,i_{l+1}}$$
homotop ist (alles läuft in U_{i_l}, und das ist kontrahierbar), ist letztlich γ homotop zu einem „Kantenzug" auf dem Graphen mit Ecken $P_i,\ Q_{i,j}$ (sofern existent) und Kanten $\kappa_{i,j}$ (sofern existent).

Also ist $\pi_1(M,*)$ das Bild von der Fundamentalgruppe dieses Graphen unter der Inklusion des Graphen. Aber die Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen ist endlich erzeugt, und das gilt dann auch für ihr Bild.

c)

Es lässt sich zeigen, dass jede endlich erzeugte Gruppe, die durch endlich viele Relationen zwischen ihren Erzeugern charakterisiert werden kann (eine *endlich präsentierte* Gruppe also), als Fundamentalgruppe einer kompakten vierdimensionalen Mannigfaltigkeit vorkommt.

Um das zu zeigen (siehe z.B. W.S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction;* Springer 1977, Seiten 143 f.), „verklebt" man zunächst zwei Kopien von $S^1 \times S^3$ (was Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$ hat) durch Ausschneiden je einer 4-dimensionalen Kugel und Verkleben längs des Randes dieser Kugel. Da die Kugel und ihr Rand S^3 einfach zusammenhängend sind, ist die Fundamentalgruppe von $S^1 \times S^3 \setminus$ (kleine Kugel) immer noch $\mathbb{Z}$, und die Fundamentalgruppe des durch Verklebung entstandenen Objekts ist frei in 2 Erzeugern. Für beides braucht man Seifert - van Kampen.

Falls die gewünschte Gruppe 3 Erzeuger hat, klebt man noch eine Kopie von $S^1 \times S^3$ an, und das wiederholt man so oft, bis man die gewünschte Anzahl von Erzeugern in der Fundamentalgruppe hat.

Ist das erreicht, muss man weitere Bausteine einkleben, die Relationen zwischen den Erzeugern implizieren, aber den Mannigfaltigkeitscharakter nicht verändern.

Nun wollen wir uns noch kurz den höheren Fundamentalgruppen zuwenden.

Hilfssatz 3.2.20 Eine Bijektion

Es seien Z, X topologische Räume.

a) Ist $G : Z \times S^1 \to X$ stetig und
$$g : Z \to \mathcal{C}(S^1, X), \quad g(z) = [s \mapsto G(z,s)],$$
so ist g stetig, wenn wir $\mathcal{C}(S^1, X)$ mit der kompakt-offenen Topologie versehen.

b) Ist $g : Z \to \mathcal{C}(S^1, X)$ stetig und

$$G : Z \times S^1 \to X, \quad G(z, s) = g(z)(s),$$

so ist G stetig.

Beweis.

a) Es sei $K \in S^1$ kompakt, $U \in X$ offen und

$$B := \{f \in \mathcal{C}(S^1, X) \mid f(K) \subseteq U\}$$

ein Erzeuger der kompakt-offenen Topologie. Wir müssen zeigen, dass $g^{-1}(B) \subseteq Z$ offen ist.

Sei dazu $z \in g^{-1}(B)$. Da G stetig ist, gibt es für jedes $s \in K$ eine Umgebung $W_s \times V_s$ von (z, s) in $Z \times S^1$, sodass $W_s \subseteq Z$ und $V_s \subseteq S^1$ offen sind und

$$G(W_s \times V_s) \subseteq U.$$

Da K kompakt ist, wird es von endlich vielen der V_s, $s \in K$ überdeckt. Der Durchschnitt der endlich vielen zugehörigen W_s ist immer noch eine Umgebung W von z, und es gilt für alle $(w, s) \in W \times K$:

$$G(w, s) \in U.$$

Das heißt aber gerade:

$$\forall w \in W : g(w) \in B.$$

Sie sehen, dass man hier noch keine spezielle Eigenschaft von S^1 braucht.

b) Nun sei g gegeben.

Weiter sei $U \subseteq X$ offen und $(z, s) \in Z \times S^1$ mit $G(z, s) \in U$.

Wir müssen eine Umgebung von (z, s) finden, deren Bild auch in U liegt. Die Menge aller $t \in S^1$ mit $g(z)(t) \in U$ ist offen, und s hat eine kompakte Umgebung K, die ganz in dieser Menge liegt.

(NB: Dies ist eine spezielle Eigenschaft von S^1; wir hätten den Beweis auch für lokal kompakte Hausdorffräume anstelle von S^1 führen können.)

Also liegt

$$g(z) \in B := \{f \in \mathcal{C}(S^1, X) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

Es gibt daher eine offene Umgebung W von z mit

$$g(W) \subseteq B.$$

Das aber heißt, dass $G(W \times K) \subseteq U$, und wir sind da, wo wir hinwollten. ○

Bemerkung 3.2.21 die punktierte Version

Die eben angebene Version einer Bijektion

$$\mathcal{C}(Z \times S^1, Y) \to \mathcal{C}(Z, \mathcal{C}(S^1, Y))$$

müssen wir jetzt in die punkierte Situation übertragen.

Es seien also $(Z,*), (S^1,*), (Y,*)$ punktiert. Dann ist auch $Z \times S^1$ piunktiert durch $(*,*)$ (wofür wir kurz $*$ schreiben), und selbst $\mathcal{C}((S^1,*),(Y,*))$ wird punktiert, nämlich durch die eine konstante Funktion, die darin liegt:

$$\forall s \in S^1 : *(s) := * \in Y.$$

Das Urbild von

$$g \in \mathcal{C}\left((Z,*), \mathcal{C}((S^1,*),(Y,*))\right)$$

ist eine Funktion $G : Z \times S^1 \to Y$ mit den Vorgaben

$$\forall s \in S^1, z \in Z : G(z,*) = g(z)(*) = * = g(*)(s) = G(*,s).$$

Diese Funktion auf $Z \times S^1$ faktorisiert durch die Projektion auf den Faktorraum

$$S(Z) := Z \times S^1 / \sim,$$

wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die außer

$$(Z \times \{*\}) \cup (\{*\} \times S^1)$$

nur einelementige Äquivalenzklassen hat.

$S(Z)$ heißt die *Suspension* von Z, ihr Basispunkt ist die eine nichttriviale Äquivalenzklasse.

Den Raum

$$\Omega(Y) := \mathcal{C}((S^1,*),(Y,*))$$

(ausgerüstet mit der kompakt-offenen Topologie und punktiert durch die konstante Abbildung) nennen wir den *Schleifenraum* von $(Y,*)$.

Summa summarum halten wir die folgende Bijektion fest:

$$\mathcal{C}((S(Z),*),(Y,*)) \to \mathcal{C}((Z,*),(\Omega(Y),*)),$$

wobei Z, Y beliebige topologische Räume sind.

Dies drückt sich (nuschelnuschel) durch auf die Homotopieklassen, und es folgt

$$[(S(Z),*),(Y,*)] \cong [(Z,*),(\Omega,*)].$$

Um dies anwenden zu können brauchen wir als Hauptbeispiel für Suspensionen die folgende Aussage.

Hilfssatz 3.2.22 Sphären sind suspendierte Sphären

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es einen Homöomorphismus zwischen der Suspension $S(S^n)$ und S^{n+1}.

Beweis.

Wir fassen alle Räume als Teilräume von $\mathbb{R}^{n+2}$ auf, insbesondere ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} &= \{(x_1, \dots x_{n+1}, 0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}, \\ S^n &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subseteq S^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \sum_{i=1}^{n+2} x_i^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Beide Sphären punktieren wir mit dem Punkt $* = (1, 0, 0, \dots, 0)$ wie früher vereinbart.

Weiter sei

$$K := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} = x_i^2 \leq 1\}$$

die Vollkugel vom Radius 1, die von S^n berandet wird.

Wir zerlegen S^{n+1} in die obere und untere Hemisphäre:

$$S_\pm^{n+1} := \{x \in S^{n+1} \mid \pm x_{n+2} \geq 0\}.$$

Die Projektionen

$$p_\pm : S_\pm^{n+1} \to K, x \mapsto (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$$

sind stetige Bijektionen, also (da es sich um kompakte Hausdorffräume handelt) Homöomorphismen.

Nun definieren wir

$$f : S^n \times I \to S^{n+1}, \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} p_+^{-1}(2tx + (1-2t)*), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \\ p_-^{-1}((2-2t)x + (2t-1)*), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Das ist stetig. Eine Fallunterscheidung zeigt, dass für $(x,t), (y,s) \in S^n \times I$ gilt:

$$f(x,t) = f(y,s) \iff (x,t) = (y,s) \text{ oder } (x,t), (y,s) \in (\{*\} \times I) \cup (S^n \times \{0,1\}).$$

Das zeigt, dass der Faktorraum von $S^n \times I$ nach der durch f gegebenen Äquivalenzrelation gerade die Suspension von S^n ist, und dieser Faktorraum ist auch (weil $S^n \times I$ kompakt und S^{n+1} hausdorffsch sind) gerade S^{n+1}. ○

Folgerung 3.2.23 alle suspendiert

Für jeden topologischen Raum $(Y,*)$ und $n \geq 1$ ist damit

$$\begin{aligned}\pi_{n+1}(Y,*) &= [(S^{n+1},*),(Y,*)]\\ &= [S^n,(\Omega(Y),*)]\\ &= \pi_n(\Omega(Y),*) = \dots\\ &= \pi_1(\Omega^{n-1}(Y),*).\end{aligned}$$

Das zeigt insbesondere, dass $\pi_n(Y,*)$ eine Gruppenstruktur trägt. Diese Gruppe heißt dann die n-*te Homotopiegruppe* von $(Y,*)$.

Sie sieht wieder nur den Homotopietyp der Wegzusammenhangskomponente von $*$ in Y, und hat dieselben funktoriellen Eigenschaften wie die Fundamentalgruppe – siehe 3.2.6.

Bemerkung 3.2.24 Beispielhaft

a) Wenn $f:(X,*)\to(Y,*)$ eine stetige Abbildung ist, dann liefert f eine stetige Abbildung

$$\Omega f:(\Omega X,*)\to(\Omega Y,*),\ g\mapsto f\circ g.$$

Dass Ωf selbst auch stetig (bezüglich der kompakt offenen Topologie) ist, folgt aus der Stetigkeit von f. Denn für kompaktes $K\subseteq S^1$ und offenes $U\subseteq Y$ ist das Urbild der Menge

$$\{g\in\Omega Y \mid g(K)\subseteq U\}$$

unter Ωf gerade die Menge

$$\{h\in\Omega X \mid h(K)\subseteq f^{-1}(U)\}.$$

Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ offen, also ist auch die zuletzt beschriebene Menge offen bezüglich der kompakt-offenen Topologie. Damit ist Ωf stetig.

Insgesamt wird hier Ω zu einem Funktor von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in sich selbst, und wir erhalten die Funktorialität von π_n durch $(n-1)$-faches Anwenden des Schleifenraumfunktors und einmaliges Anwenden von π_1. Klar ist $\pi_n(f)$ ein Gruppenhomomorphismus.

b) Wenn zwei Räume homotopieäquivalent sind, dann sind für jedes $n\geq 1$ ihre n-ten Homotopiegruppen isomorph – das ist eine Konsequenz der Funktorialität und der Tatsache, dass die Schleifenräume homotopieäquivalenter Räume wieder homotopieäquivalent sind, und π_1 nur die Homotopieäquivalenz sieht.

c) Die Homotopiegruppen der Sphären fangen an wie folgt:

	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9
S^0	$\{\{1\},\{-1\}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\{*\}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	$\{*\}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	C_2	C_2	C_{12}	C_2	C_2	C_3
S^3	$\{*\}$	0	0	$\mathbb{Z}$	C_2	C_2	C_{12}	C_2	C_2	C_3
S^4	$\{*\}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	C_2	C_2	$\mathbb{Z}\times C_{12}$	C_2^2	C_2^2
S^5	$\{*\}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	C_2	C_2	C_{24}	C_2

Hierbei ist C_l die zyklische Gruppe mit l Elementen.

Weiter bedeutet $\{*\}$ in der ersten Spalte jeweils, dass S^n für $n \geq 1$ wegzusammenhängend ist. Die Nullen in der ersten Zeile kommen daher, dass es für $k \geq 1$ überhaupt nur die konstante Abbildung $*$ von S^k nach S^0 gibt (als punktierte Räume).

Die Nullen unterhalb der Diagonalen kommen daher, dass eine stetige Abbildung $f : (S^k, *) \to (S^n, *)$ für $k < n$ immer zu einer stetigen Abbildung $g : (S^k, *) \to (S^n, *)$ homotop ist, die nicht surjektiv ist. Um das einzusehen, muss man f „simplizial approximieren", und diese Approximation landet nach Konstruktion im „k-Skelett" der S^n, ist also nicht surjektiv.

Dann ist aber für ein $P \in S^n \smallsetminus g(S^k)$ die Abbildung g auch als Abbildung nach $S^n \smallsetminus \{P\}$ aufzufassen, und dieser letzte Raum ist kontrahierbar – womit g und damit auch f nullhomotop ist.

Die $\mathbb{Z}$-Einträge auf der Diagonalen kommen vom sogenannten *Abbildungsgrad*, einer Verallgemeinerung der Umlaufzahl, die die Elemente von $\pi_1(S^1)$ charakteristiert.

d) Die vielen Nullen in der zweiten Zeile kommen daher: wir haben die alte Projektion $p : \mathbb{R} \to S^1,\ x \mapsto (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$.

Diese ist surjektiv, und $p(x) = p(y) \iff x - y \in \mathbb{Z}$. Wir können also die Faser von jedem $s \in S^1$ mit $\mathbb{Z}$ identifizieren, und dies können wir lokal so einrichten, dass jeder Punkt $s \in S^1$ eine Umgebung U besitzt, sodass $p^{-1}U \cong U \times \mathbb{Z}$ gilt und diese Identifikation (von topologischen Räumen) mit p auf der linken Seite und der Projektion aufs erste Argument rechts verträglich ist.

Damit wird $(\mathbb{R}, p)$ zu einem *Faserbündel*, was auch immer das ist.

Zur Inklusion $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ und zu p gehören Gruppenhomomorphismen

$$\pi_n(\mathbb{Z}) \stackrel{\pi_n(\alpha)}{\longrightarrow} \pi_n(\mathbb{R}) \stackrel{\pi_n(p)}{\longrightarrow} \pi_n(S^1)$$

Nun geschieht ein kleines Wunder, das eng mit dem Begriff des Faserbündels verknüpft ist. Es gibt Gruppenhomomorphismen (die von α und p „induziert" werden)

$$\partial_n : \pi_n(S^1) \to \pi_{n-1}(\mathbb{Z}),$$

sodass die lange Sequenz

$$\dots \stackrel{\partial_{n-1}}{\longrightarrow} \pi_n(\mathbb{Z}) \stackrel{\pi_n(\alpha)}{\longrightarrow} \pi_n(\mathbb{R}) \stackrel{\pi_n(p)}{\longrightarrow} \pi_n(S^1) \stackrel{\partial_n}{\longrightarrow} \pi_{n-1}(\mathbb{Z}) \dots$$

exakt ist, das heißt: an jeder Stelle ist der Kern des ausgehenden Homomorphismus gleich dem Bild des ankommenden.

Da $\mathbb{R}$ kontrahierbar ist, wird für jedes n die Gruppe $\pi_n(\mathbb{R})$ trivial, und die folgende Sequenz ist exakt:

$$0 = \pi_n(\mathbb{R}, *) \to \pi_n(S^1, *) \to \pi_{n-1}(\mathbb{Z}, 0) \to 0 = \pi_{n-1}(\mathbb{R}, 0).$$

Also ist

$$\pi_n(S^1, *) \simeq \pi_{n-1}(\mathbb{Z}, 0),$$

und das ist $\mathbb{Z}$ für $n = 1$ und 0 sonst, da alle stetigen Abbildungen von $(S^n, *)$ nach $(\mathbb{Z}, 0)$ für $n \geq 1$ wegen des Zusammenhangs von S^n konstant gleich 0 sind.

e) Ein ähnliches Argument liefert die Isomorphie

$$\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2),\ k \geq 3.$$

Hier benutzt man

$$S^3 = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid |w|^2 + |z|^2 = 1\}$$

und die Identifikation

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2,$$

um die Abbildung

$$\eta : S^3 \to S^2,\ \eta(w, z) := \mathbb{C} \cdot (w, z) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

zu definieren. Sie heißt die *Hopf*[4]*-Faserung*.

Zwei Punkte (w, z) und $(\tilde{w}, \tilde{z})$ haben dasselbe Bild, wenn sie linear abhängig sind. Wegen der Normierung heißt das:

$$\eta((w, z)) = \eta(\tilde{w}, \tilde{z}) \iff \exists \lambda \in S^1 : (\tilde{w}, \tilde{z}) = \lambda(w, z).$$

[4] Heinz Hopf, 1894-1971

Diese Identifizierung der Fasern von η mit einem Raum, hier S^1, lässt sich wieder – wie eben in d) – lokal verträglich machen: wir bekommen ein Faserbündel mit Faser S^1.

Dazu gehört wieder eine lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \pi_n(S^1) \to \pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \to \pi_{n-1}(S^1) \dots$$

Da für $n \geq 3$ stets nach d) die Gleichung $\pi_n(S^1) = \pi_{n-1}(S^1) = 0$ gilt, muss – wegen der Exaktheit –

$$\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$$

gelten.

Schön, gell?

Alle weiteren Einträge der Tabelle verschwimmen für uns noch mehr im Nebulösen... es gibt allerdings Leute, die das richtig gut verstehen.

Folgerung 3.2.25 wir glauben die Tabelle mal

Jetzt können wir tatsächlich einsehen, dass zwei reelle Vektorräume $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ genau dann homöomorph sind, wenn $n = m$ gilt.

Dazu seien ohne Einschränkung $n, m \geq 1$, sonst hülfe ja ein Kardinalitätsargument.

Wenn dann

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

irgendein Homöomorphismus ist, dann drehen wir den erst einmal durch eine Affinität so hin, dass $f(0) = 0$ und $f(e_1) = e_1$ gilt.

Dann ist die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ ein Homöomorphismus

$$\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \smallsetminus \{0\},$$

aber diese Räume haben wegen des Beispiels bei 3.2.7 die Sphären S^{n-1} und S^{m-1} als Deformationsretrakte.

Wegen der Funktorialität von π_k müssen also alle Homotopiegruppen von S^{n-1} und S^{m-1} übereinstimmen, und das heißt insbesondere wegen $\pi_{m-1}(S^{m-1}) \cong \pi_{m-1}(S^{n-1})$ und umgekehrt:

$$n - 1 \leq m - 1 \leq n - 1 : \quad n = m.$$

3.3 Überlagerungen

Definition 3.3.1 Lokalkolorit

a) Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenhängend*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus zusammenhängenden offenen Umgebungen besitzt.

b) Ein toplogischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden offenen Umgebungen besitzt.

KONVENTION In diesem Abschnitt sei X immer zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

Insbesondere ist X dann wegzusammenhängend.

Definition 3.3.2 Überlagerung

a) Eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ heißt ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jedes $y \in Y$ eine offene Umgebung V besitzt, sodass $f(V) \subseteq X$ offen ist und $f|_V : V \to f(V)$ ein Homöomorphismus ist.

Ein lokaler Homöomorphismus ist immer offen (klar, oder?).

b) Es sei X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Weiter sei $\widetilde{X}$ nichtleer und wegzusammenhängend, und $p : \widetilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung.

Dann heißt $(\widetilde{X}, p)$ eine *Überlagerung* von X, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass jede Wegzusammenhangskomponente K von $p^{-1}(U)$ durch $p|_K$ homöomorph auf U abgebildet wird.

Jede solche Umgebung nennen wir eine *Elementarumgebung* für p.

c) Eine Überlagerung ist immer ein lokaler Homöomorphismus, denn für $\widetilde{x}$ nehmen wir eine Elementarumgebung U von $x := p(\widetilde{x})$ und die Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, die $\widetilde{x}$ enthält. Sie ist offen und wird via p mit U identifiziert.

Daher ist das Bild von p offen in X.

Wenn $x \in X \smallsetminus p(\widetilde{X})$ ein Punkt außerhalb des Bildes von p ist, dann hat auch x eine Elementarumgebung U, die via p zu jeder Zusammenhangskomponente ihres Urbildes homöomorph ist. Da p aber den Punkt $x \in U$ nicht trifft, kann es keine solche Zusammenhangskomponente geben (NB: eine Zusammenhangskomponente ist immer nichtleer, denn sie ist eine Äquivalenzklasse...). Daher enthält das Urbild kein Element, also gehört ganz U zu $X \smallsetminus p(\widetilde{X})$.

Daher ist das Komplement des Bildes auch offen.

Da X zusammenhängend ist und $\widetilde{X}$ nichtleer, ist p surjektiv.

d) Etwas allgemeiner ist die Anzahl der Urbilder von $x \in X$ unter p lokal konstant. Wenn x und y nämlich in einer Elementarumgebung U liegen, ist die Anzahl ihrer Urbilder gerade die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$.

Da X zusammenhängend ist, ist die Anzahl der Urbilder auf ganz X konstant.

Man nennt die Kardinalität $\#p^{-1}(\{x\})$ der Faser eines beliebigen $x \in X$ die *Blätterzahl* oder auch der *Grad* von p.

Beispiel 3.3.3 alte Bekannte

a) Die Abbildung $\pi : \mathbb{R} \to S^1, x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ ist eine Überlagerung.

b) Die Abbildung $p : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x \mapsto [x]$, ist eine Überlagerung.

c) Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ist eine Überlagerung. In gewisser Weise verallgemeinert das Beispiel a).

Definition 3.3.4 Steckenpferd

Es sei X wie gehabt und Γ eine Gruppe. Weiter sei

$$\bullet : \Gamma \times X \to X$$

eine Gruppenoperation, sodass für jedes $\gamma \in \Gamma$ die Abbildung

$$\gamma\bullet : X \ni x \mapsto \gamma \bullet x \in X$$

ein Homöomorphismus ist.

Außerdem operiere die Gruppe fixpunktfrei auf X, das heißt, dass jedes $x \in X$ trivialen Stabilisator hat.

Dann heißt die Operation *eigentlich diskontinuierlich*, wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung U existiert, sodass die Mengen $\gamma \bullet U, \gamma \in \Gamma,$ paarweise disjunkt sind.

In allen Beispielen oben liegt eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenaktion zugrunde: stets ist das Bild der Überlagerung der Quotient vom Definitionsraum nach solch einer Aktion. (Die Gruppe ist $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}^n$.)

NB: Es gibt leicht differierende Versionen des Begriffs „eigentlich diskontinuierlich". Insbesondere wenn X auch noch ein lokal kompakter metrischer Raum ist und $\gamma\bullet$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ eine Isometrie ist, spricht man von eigentlicher Diskontinuität, wenn für jedes kompakte $K \subseteq X$ nur endlich viele Elemente γ existieren, für die $(\gamma \bullet K) \cap K \neq \emptyset$. Für viele interessante Räume ist das unter Annahme der Fixpunktfreiheit zur obigen Definition äquivalent.

Hilfssatz 3.3.5 Allgemeines Beispiel

Es sei $\widetilde{X}$ ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum und Γ eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierlich auf $\widetilde{X}$ operiert.

Dann ist $X := \widetilde{X}/\Gamma$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und die kanonische Projektion $\pi : \widetilde{X} \to X$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Klar ist X als stetiges Bild von $\widetilde{X}$ zusammenhängend.

Da für $T \subseteq \widetilde{X}$ stets die Gleichheit

$$\pi^{-1}(\pi(T)) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \bullet T$$

gilt und $\gamma\bullet$ stetig ist, sind die Bilder von offenen Teilmengen von $\widetilde{X}$ unter π offene Teilmengen von X. Insbesondere ist π offen.

Ist U eine Umgebung von $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, die mit allen ihren Translaten unter Γ trivialen Schnitt hat, so wird U injektiv auf $\pi(U)$ abgebildet. Die Abbildung $\pi|_U$ ist eine offene stetige Bijektion mit $\pi(U)$, also ist π ein lokaler Homöomorphismus.

Insbesondere ist X lokal wegzusammenhängend.

Nun sei $x \in X$. Wir wählen ein Urbild $\widetilde{x}$ von x unter π und eine wegzusammenhängende Umgebung U von $\widetilde{x}$, die mit ihren Translaten unter Γ trivialen Schnitt hat.

$\pi(U)$ ist eine wegzusammenhängende Umgebung von x, und nun müssen wir einsehen, dass U die Wegzusammenhangskomponente von $\widetilde{x}$ in $S := \pi^{-1}(\pi(U))$ ist.

Dazu müssen wir einsehen, dass keine U echt umfassende Teilmenge von S wegzusammenhängend ist.

Sei also $z \in S$ und $\omega : I \to S$ ein Weg von $\widetilde{x}$ nach z. Es gibt dann genau ein $\gamma_0 \in \Gamma$, sodass z in $\gamma_0 \bullet U$ liegt. Die Überdeckung von I durch die Urbilder

$$\omega^{-1}(\gamma \bullet U)$$

ist eine disjunkte Überdeckung durch offene Teilmengen, also – da I zusammenhängend ist – sind die Mengen $\omega^{-1}(\gamma \bullet U)$ bis auf eine leer. Es folgt $\gamma_0 = 1$, und z liegt in U. ◯

Hilfssatz 3.3.6 . . . höchstens ein Lift. . .

Es seien $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und $f_0, f_1 : Y \to \widetilde{X}$ stetige Abbildungen mit

$$p \circ f_0 = p \circ f_1.$$

Dann gilt $f_0 = f_1$, oder $\forall y \in Y :\ f_0(y) \neq f_1(y)$.

Beweis. Es sei

$$Z := \{y \in Y \mid f_0(y) = f_1(y)\}.$$

Für $y \in Y$ sei $x = pf_0(y) = pf_1(y)$. Weiter seien U eine Elementarumgebung von x, K die Wegzusammenhangskomponente von $f_0(y)$ in $p^{-1}(U)$, K_1 die von $f_1(y)$ in dieser Menge, $q_0 : U \to K_0$ die Inverse zu $p|K_0$, und q_1 analog.

Schließlich sei $V := f_0^{-1}(K_0) \cap f_1^{-1}(K_1)$. Dann gilt für $v \in V$:

$$f_0(v) = q_0(p(f_0(v))) \text{ und } f_1(v) = q_1(p(f_1(v))),$$

jeweils weil $f_i(v)$ in K_i landet und q_i auf $p(K_i)$ das Richtige tut.

Nach Definition liegt y in W, und W ist offen.

Wenn nun $y \in Z$ gilt, dann stimmen K_0 und K_1 überein, und es folgt, dass ganz W in Z liegt. Damit ist Z offen.

Wenn y nicht in Z liegt, stimmen f_0 und f_1 auf ganz W nirgends überein, denn sie nehmen Werte in verschiedenen Zusammenhangskomponenten an. Daher ist auch $Y \smallsetminus Z$ offen.

Insgesamt ist Z sowohl offen als auch abgeschlossen, und das impliziert die Behauptung, denn Y ist zusammenhängend. ◯

Hilfssatz 3.3.7 ...genau ein Lift...

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ *eine Überlagerung und* $\omega : I \to X$ *eine Kurve. Weiter sei* $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ *ein Punkt mit* $\omega(0) = p(\tilde{x})$.

Dann gibt es genau eine Kurve $\tilde{\omega} : I \to \widetilde{X}$ *, sodass*

$$\tilde{\omega}(0) = \tilde{x} \text{ und } \omega = p \circ \tilde{\omega}.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit haben wir durch den vorherigen Hilfssatz abgesichert.

Zur Konstruktion von $\widetilde{\omega}$ wählen wir für jedes $x \in \omega(I)$ eine Fundamentalumgebung. Deren Urbilder unter ω sind eine offene Überdeckung von I, und zu dieser gehört eine Lebesguezahl $\varepsilon > 0$. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Dann liegen die Intervalle

$$[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}],\ 1 \le j \le m,$$

alle im Urbild einer Elementarumgebung in X. Nun definieren wir sukzessive die Kurve $\widetilde{\omega}$ durch folgendes Vorgehen:

$\omega(0)$ hat eine Elementarumgebung U_1, in der $\omega([0, 1/m])$ enthalten ist. Wir benutzen den zu p inversen Homöomorphismus q_1 von U_1 zur Zusammenhangskomponente von $\tilde{x}$ in $p^{-1}(U_1)$ und setzen für $t \in [0, 1/m]$

$$\tilde{\omega}(t) := q_1(\omega(t)).$$

Wenn wir sukzessive die Abbildung $\tilde{\omega}$ auf den Intervallen $[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}]$ für $1 \le j \le k$ schon haben und $k < m$ gilt, dann nehmen wir eine Elementarumgebung U_{k+1} von $\omega(k/m)$, die das Bild $\omega([k/m, (k+1)/m])$ enthält, und nehmen für q_{k+1} den Homöomorphismus von U_{k+1} zur Zusammenhangskomponente von $\tilde{\omega}(k/m)$ und $p^{-1}(U_{k+1})$, der dort zu p invers ist. Dann setzen wir

$$\tilde{\omega}(t) := q_{k+1}(\omega(t)),\ \frac{k}{m} \le t \le \frac{k+1}{m}.$$

Nach Konstruktion passen die verschiedenen Teile von $\tilde{\omega}$ an den Nahtstellen zusammen und definieren daher insgesamt eine stetige Abbildung, die tut was wir wollen. $\bigcirc$

Bemerkung 3.3.8 nochmal die Blätterzahl

a) Der Weg $\tilde{\omega}$ aus dem letzten Hilfssatz wird oft ein *Lift* von ω nach $\widetilde{X}$ genannt. Man stellt sich das imer so vor, dass die Überlagerung von oben auf den überlagerten Raum fällt, und dass man Dinge von unten *hochheben* muss, um sie oben in $\widetilde{X}$ wiederzufinden.

b) Nun haben wir noch einmal eine Möglichkeit, eine Bijektion zwischen den Urbildern $p^{-1}(x)$, $p^{-1}(y)$ für zwei Punkte $x, y \in X$ unter der Überlagerung p zu finden.

Dazu wählen wir einen Weg ω von x nach y im noch immer wegzusammenhängenden Raum X. Für jedes $\tilde{x}$ lässt sich dieser Weg auf eindeutige Art zu einem Weg in $\widetilde{X}$ liften, und wenn wir $\tilde{x}$ den Endpunkt dieses Weges zuordnen, dann ist das eine Abbildung von $p^{-1}(x)$ nach $p^{-1}(y)$.

In der umgekehrten Richtung erhalten wir auch eine Abbildung, die einem $\tilde{y} \in p^{-1}(y)$ den Endpunkt des Lifts von $\overleftarrow{\omega}$ mit Anfangspunkt $\tilde{y}$ zuordnet.

Diese Abbildungen sind zueinander invers, denn wenn $\tilde{\omega}$ ein Lift von ω mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ und Endpunkt $\tilde{y}$ ist, dann ist $\overleftarrow{\tilde{\omega}}$ ein Lift von $\overleftarrow{\omega}$ mit Anfangspunkt $\tilde{y}$ und Endpunkt $\tilde{x}$.

Hilfssatz 3.3.9 siehe Kapitelüberschrift

Es seien $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\tilde{\omega}_i : I \to \widetilde{X},\ i = 0, 1$ zwei Wege in $\widetilde{X}$, die denselben Anfangspunkt haben, und deren Bilder $\omega_i := p \circ \tilde{\omega}_i$ in X relativ zu ∂I homotop sind.

Dann sind auch $\tilde{\omega}_0$ und $\tilde{\omega}_1$ relativ zu ∂I homotop. Insbesondere gilt auch

$$\tilde{\omega}_0(1) = \tilde{\omega}_1(1).$$

Beweis. Es sei

$$H : I \times I \to X, \text{ mit } \begin{array}{l} H(u,0) = \omega_0(u),\ H(u,1) = \omega_1(u), \\ H(0,t) = H(0,0), H(1,t) = H(1,0) \end{array}$$

eine Homotopie, die nach Voraussetzung mit den angegebenen Eigenschaften für alle $u, t \in I$ existiert.

Zu dieser Abbildung des kompakten metrischen Raums $I \times I$ nach X und der überdeckung von X durch Elementarumgebungen gehört wieder eine Lebesguezahl, und insbesondere gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Quadrat

$$Q_{i,j} := [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}] \subseteq I \times I,\ 1 \le i, j \le m,$$

gilt, dass

$$H(Q_{i,j}) \subseteq U_{i,j},$$

wobei $U_{i,j}$ eine Elementarumgebung in X ist.

Es sei $\widetilde{U}_{i,1}$ die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_{i,1})$, die $\tilde{\omega}_0(i/m)$ enthält, und $q_{i,1}$ der zu p inverse Homöomorphismus von $U_{i,1}$ nach $\widetilde{U}_{i,1}$. Wir setzen

$$\forall (u,t) \in Q_{i,1} : \widetilde{H}(u,t) := q_{i,1}(H(u,t)).$$

Wegen Hilfssatz 3.3.6 und

$$\omega_0(i/m) \in U_{i,1} \cap U_{i+1,m}$$

stimmen diese Definitionen auf $Q_{i,1} \cap Q_{i+1,1}$ überein, und wir erhalten einen stetigen Lift von $H|_{I\times[0,1/m]}$ nach $\widetilde{X}$.

Auch wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist diese Lift jeweils für $u = 0$ und $u = 1$ unabhängig von t.

Das definiert eine stetige Kurve $\tilde{\omega}_{1/m} : I \to \widetilde{X}$, die $H|_{I\times\{1/m\}}$ nach $\widetilde{X}$ liftet und bei $\tilde{\omega}_0(0)$ anfängt und bei $\omega_0(1)$ aufhört.

Für $j = 1$ und mit dieser Kurve $\tilde{\omega}_{1/m}$ anstelle von $\tilde{\omega}_0$ wiederholen wir das Spielchen von gerade, und so fortfahrend definieren wir sukzessive den Lift $\widetilde{H}$ von H nach $\widetilde{X}$. ○

Folgerung 3.3.10 einfach zusammenhängend

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Dann gelten:

a) *Für jedes $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ ist die Abbildung*

$$\pi_1(p) : \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \to \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

injektiv.

b) *Ist $\widetilde{X}$ zusammenhängend und X einfach zusammenhängend, dann ist p ein Homöomorphismus.*

Beweis.

a) Das folgt sofort aus 3.3.9, denn insbesondere sagt dieser Hilfssatz ja, dass zwei geschlossene Kurven mit Anfangs- und Endpunkt $\tilde{x}$ in $\widetilde{X}$ sicher dann homotop sind, wenn dies für die Bildkurven in X gilt. Aber die entsprechende Zuordnung $[\tilde{\omega}] \mapsto [p \circ \tilde{\omega}]$ definiert gerade $\pi_1(p)$, und folglich ist das injektiv.

b) Es seien $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ zwei Urbilder von $x \in X$ unter p. Da $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend (weil zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend) ist, gibt es einen stetigen Weg $\tilde{\omega}$ von $\tilde{x}_1$ nach $\tilde{x}_2$. Sein Bild ist ein geschlossener Weg in X, und dieser ist homotop zum konstanten Weg, denn X ist als einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Wieder wegen 3.3.9 folgt, dass $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$ gilt, das heißt: p ist injektiv. Da es auch surjektiv ist, ist es bijektiv, und damit als offene, stetige Bijektion ein Homöomorphismus. ◯

Definition 3.3.11 universelle Überlagerung

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

a) p heißt eine *universelle Überlagerung* von X, wenn $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

b) Ist $r : Y \to X$ eine weitere Überlagerung von X, so heißt eine stetige Abbildung $s : \widetilde{X} \to Y$ eine *Morphismus zwischen p und r*, wenn $r \circ s = p$ gilt.

In diesem Fall ist s eine Überlagerung von $\widetilde{X}$ auf $Z = s(\widetilde{X}) \subseteq Y$, denn für $z \in Z$ gibt es eine gemeinsame Elementarumgebung U für p und r, die $r(z)$ enthält. Es sei K die Zusammenhangskomponente von $r^{-1}(U)$, die z enthält. Die Zusammenhangskomponenten von $s^{-1}(K)$ sind dann auch Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$, und also zu U und damit zu K homöomorph, wobei die Homöomorphismen jeweils durch die bereits gegebenen Abbildungen vermittelt werden.

Das definiert eine Kategorie, deren Objekte gerade die zusammenhängenden Überlagerungen von X sind.

Die Automorphismen einer gegebenen Überlagerung, also die Homöomorphismen $s : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ mit $p = p \circ s$, heißen die *Decktransformationen* von p. Sie bilden eine Gruppe $\mathrm{Deck}(p)$, die kreativer Weise die *Decktransformationsgruppe* von p genannt wird.

c) Es ist sinnvoll, sich auf zusammenhängende Überlagerungsräume zu beschränken, denn die verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\widetilde{X}$ leben ohne sich zu sehen nebeneinander her und beeinflussen sich nicht gegenseitig. Man kann jede Zusammenhangskomponente für sich untersuchen.

Konvention: Im Weiteren seien auch immer die Räume, die X überlagern, zusammenhängend.

Hilfssatz 3.3.12 Decktransformationen sind fixpuntfrei

a) *Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\widetilde{X}$ zusammenhängend, und $\tau : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ eine Decktransformation von p.*

   Dann gilt $\tau = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}}$, oder τ hat keinen Fixpunkt auf $\widetilde{X}$.

b) *Die Decktransformationsgruppe $\mathrm{Deck}(p)$ operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\widetilde{X}$.*

Beweis.

a) Das folgt wieder aus 3.3.6, indem wir $Y = \widetilde{X}$, $f_0 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}}$ und $f_1 = \tau$ nehmen.

b) Für $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ sei U eine Elementarumgebung von $p(\tilde{x})$ und V die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, die $\tilde{x}$ enthält. Dann ist V eine offene Umgebung von $\tilde{x}$, und eine Decktransformation τ, für die $\tau V \cap V \neq$ gilt, muss einen Fixpunkt in V haben, denn für $v \in \tau V \cap V \neq \emptyset$ gibt es nur ein Urbild von $p(v)$ in V, also ist $\tau(v) = v$. Es folgt wegen a), dass τ die Identität ist. ○

Bemerkung 3.3.13 Konjugationsklasse

Wir erinnern noch einmal an 3.3.10, und ordnen jeder Überlagerung $p : \widetilde{X}$ nach Wahl von $x \in X$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ die Untergruppe $\pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X}))$ zu, die zur Fundamentalgruppe von $\widetilde{X}$ isomorph ist.

In Wirklichkeit ist das Bild von $\pi_1(p)$ aber immer noch von der Wahl eines Basispunkts $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ ab. Ändert man diesen in der Faser von $x := p(\tilde{x})$ ab, so erhält man eine konjugierte Untergruppe in $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$. Das ist die *zu p gehörende Konjugationsklasse* von Untergruppen in $\pi_1(X, x)$.

Wir werden noch sehen, dass diese die Überlagerung im Wesentlichen eindeutig festlegt.

Hilfssatz 3.3.14 Noch mal ein Lift

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ stetig. Alle Räume hierbei seien zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend.

Weiter sei $y \in Y$ gewählt, $x = f(y)$ und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Dann sind äquivalent:

i) Es gibt einen stetigen Lift $\tilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ von f mit $\tilde{f}(y) = \tilde{x}$.

ii) Es gilt $\pi_1(f)(\pi_1(Y, y)) \subseteq \pi_1(p)(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Wenn es einen Lift gibt, so gilt ja $f = p \circ \tilde{f}$, und daher wegen der Funktorialität von π_1 auch

$$\pi_1(f) = \pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f}),$$

also für jede Klasse $[\alpha] \in \pi_1(Y, y)$:

$$\pi_1(f)([\alpha]) = \pi_1(p)([\alpha \circ \tilde{f}]) \in \pi_1(p)(\pi_1(X\widetilde{X}, \tilde{x})).$$

Also folgt *ii)*

ii) $\Rightarrow$ *i)* Das ist die interessantere Richtung. Wir konstruieren $\tilde{f}$ auf folgende Art: Es sei $z \in Y$ ein Punkt. Da Y wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\alpha : I \to Y$ mit $\alpha(0) = y,\ \alpha(1) = z$.

Diesen Weg schieben wir mit f nach X und erhalten den Weg $f \circ \alpha$, der bei x anfängt. Diesen Weg können wir wegen 3.3.7 auf genau eine Art nach $\widetilde{X}$ liften. Den Lift nennen wir $\widetilde{f \circ \alpha}$. Sein Endpunkt muss – wenn es $\tilde{f}$ überhaupt geben kann – gerade $\tilde{f}(z)$ sein.

Wir müssen nun zeigen, dass der so definierte Punkt

$$\tilde{f}(z) := \text{Endpunkt von } \widetilde{f \circ \alpha}$$

nicht von α sondern nur von z abhängt, und zwar stetig.

Wohldefiniertheit: Es sei $\beta : I \to Y$ ein anderer Weg von y nach z. Dann ist $\alpha \bullet \overleftarrow{\beta}$ ein geschlossener Weg in Y, und sein Bild $\gamma := f \circ (\alpha \bullet \overleftarrow{\beta})$ ist ein geschlossener Weg in X, der bei x anfängt und aufhört.

Der Lift $\widetilde{\gamma}$ von γ nach $\widetilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}$ ist geschlossen.

Denn: Wegen der Voraussetzung *ii)* ist die Klasse von γ homotop zum Bild eines geschlossenen Weges $\tilde{\omega} : (I, \partial I) \to (\widetilde{X}, \tilde{x})$, und daher ist wegen 3.3.9 auch der Lift von γ zu $\tilde{\omega}$ homotop und insbesondere geschlossen.

Das heißt aber, dass die zweite Hälfte von

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{f \circ (\alpha \bullet \overleftarrow{\beta})} = (\widetilde{f \circ \alpha}) \bullet (\widetilde{f \circ \overleftarrow{\beta}})$$

bei $\tilde{x}$ aufhört.

Also hört – wieder wegen der Eindeutigkeit – der Lift von $f \circ \beta$, der bei $\tilde{x}$ anfängt, dort auf, wo $\widetilde{f \circ \overleftarrow{\beta}}$ anfängt, nämlich beim Ende von $\widetilde{f \circ \alpha}$.

Deshalb hängt das oben definierte $\tilde{f}(z)$ nicht von α ab.

Stetigkeit von $\tilde{f}$: Wir zeigen die Stetigkeit von $\tilde{f}$ im Punkt $z \in Y$.

Es sei W eine offene Umgebung von $\tilde{f}(z)$. Da p offen ist, ist $p(W)$ eine offene Umgebung von $p(\tilde{f}(z)) = f(z)$. In ihr ist eine Elementarumgebung U von $f(z)$ enthalten. Es sei V die Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$, die $\tilde{f}(z)$ enthält, und $q : U \to V$ der zu p inverse Homöomorphismus. Man kan U so klein machen, dass V in W enthalten ist (Stichwort Umgebungsbasis).

Schließlich sei Z eine wegzusammenhängende Umgebung von z, die in $f^{-1}(U)$ enthalten ist – Y ist ja lokal wegzusammenhängend, und f ist stetig...

Nun fixieren wir einen Weg α in Y, der von y nach z läuft.

Für $u \in Z$ sei β ein Weg von z nach u in Z. Dann ist $\alpha \bullet \beta$ ein Weg von y nach u, und $\tilde{f}(u)$ ist der Endpunkt des lifts von $f \circ (\alpha \bullet \beta)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}$.

Da das Bild von β ganz in U verläuft, ist dieser Lift gleich

$$\widetilde{(f \circ \alpha)} \bullet q \circ (f \circ \beta).$$

Insbesondere liegt der Endpunkt des Lifts in $q(U) \subseteq W$, und damit ist $\tilde{f}(Z) \subseteq W$. Daher ist $\tilde{f}$ stetig. ○

Folgerung 3.3.15 Die Universalität der universellen Überlagerung

Es sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung von X und $f : Y \to X$ eine Überlagerung von X durch einen zusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden Raum.

Dann gelten:

a) *Es gibt einen Morphismus $\varphi : (\widetilde{X}, p) \to (Y, f)$ von Überlagerungen von X.*

b) *Ist auch Y eine universelle Überlagerung, so ist φ ein Isomorphismus.*

c) *Die Decktransformationsgruppe von p operiert auf den Fasern von p transitiv.*

d) *Für ein (jedes) $x \in X$ gibt es einen Isomorphismus*

$$\mu : \mathrm{Deck}(p) \to \pi_1(X, x).$$

Beweis. a) Wie benutzen den vorherigen Hilfssatz (mit vertauschten Rollen für $\widetilde{X}$ und $Y \ldots$) und sehen, dass *ii)* gilt, da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, also triviale Fundamentalgruppe hat.

b) Dies folgt, weil ein Morphismus zwischen zusammenhängenden Überlagerungen eine Überlagerung ist, und weil wir dann 3.3.10 benutzen können.

c) Wenn $\tilde{x}, \hat{x} \in p^{-1}(x)$ sind, so gibt es für $\widetilde{X} = Y$ und $f = p$ nach dem letzten Hilfssatz einen Lift von p nach $\widetilde{X}$, der $\tilde{x}$ auf $\hat{x}$ abbildet. Dieser Lift ist aber eine Decktransformation von p, und das zeigt die Behauptung.

d) Es seien $x \in X$ beliebig und $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ auch beliebig. Für eine Decktransformation τ von p gibt es einen stetigen Weg α von $\tilde{x}$ nach $\tau(\tilde{x})$ in $\widetilde{X}$.

Das Bild dieses Weges in X ist ein geschlossener Weg $p\alpha$, und wir ordnen τ die Homotopieklasse von $p\alpha$ zu:

$$\mu(\tau) := [f \circ \alpha].$$

Dies ist wohldefiniert, denn wenn β ein weiterer Weg von $\tilde{x}$ nach $\tau(\tilde{x})$ ist, ist $\alpha \bullet \overleftarrow{\beta}$ geschlossen, also nullhomotop ($\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend), also sind die Klassen von $f \circ \alpha$ und von $f \circ \overleftarrow{\beta}$ zueinander invers. Das zeigt, dass die Klassen von $f \circ \alpha$ und $f \circ \beta$ übereinstimmen.

Die Abbildung μ ist surjektiv, denn wenn $\gamma : (I, \partial I) \to (X, x)$ ein geschlossener Weg ist, liftet er zu einem Weg $\tilde{\gamma}$, der bei $\tilde{x}$ anfängt und bei einem Punkt $\hat{x}$ in der Faser über x aufhört. Da $\mathrm{Deck}(p)$ wegen c) transitiv auf dieser Faser operiert, gibt es ein τ mit $\tau(\tilde{x}) = \hat{x}$. Nach Konstruktion von μ folgt $\mu(\tau) = [\gamma]$.

Die Abbildung μ ist auch injektiv, denn wenn $\tau, \sigma \in \mathrm{Deck}(p)$ auf dieselbe Homotopieklasse abgebildet werden, müssen nach 3.3.9 die Punkte $\sigma(\tilde{x})$ und $\tau(\tilde{x})$ übereinstimmen. Da die Decktransformationsgruppe nach 3.3.12 ohne Fixpunkte operiert, folgt $\sigma = \tau$.

Schließlich ist μ ein Gruppenhomomorphismus. Wenn nämlich $\sigma, \tau \in \mathrm{Deck}(p)$ sind und α, β Wege von $\tilde{x}$ nach $\sigma(\tilde{x})$ bzw. $\tau(\tilde{x})$ sind, dann ist $\sigma \circ \beta$ eine Weg von $\sigma(\tilde{x})$ nach $\sigma(\tau(\tilde{x}))$, und es gilt mit $\gamma := \alpha \bullet (\sigma \circ \beta)$ und wegen $p = p\sigma$:

$$\mu(\sigma \circ \tau) = [p(\alpha \bullet \sigma \circ \beta)] = [p\alpha] \bullet [p\sigma\beta] = [p\alpha] \bullet [p\beta] = \mu(\tau) \bullet \mu(\sigma).$$

○

Satz 3.3.16 Hauptsatz der Überlagerungstheorie

Es seien X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und $p : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Weiter sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt.

Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge aller Isomorphieklassen von zusammenhängenden Überlagerungen von X und der Menge aller Konjugationsklassen von Untergruppen von $\pi_1(X, x)$.

Beweis. Wir kennen bereits die Konjugationsklasse, die zu einer Überlagerung gehört.

Ist umgekehrt $\Gamma \subseteq \pi_1(X, x)$ eine Untergruppe, so benutzen wir die Identifikation von $\pi_1(X, x)$ mit $\mathrm{Deck}(p)$ und lassen Γ auf $\widetilde{X}$ operieren.

Dann ist wegen 3.3.12 und 3.3.5 die kanonische Abbildung $r : \widetilde{X} \to \Gamma \backslash \widetilde{X}$ eine Überlagerung, deren Decktransformationsgruppe gerade Γ ist, und diese ist wegen 3.3.15 die Fundamentalgruppe von $\Gamma \backslash \widetilde{X}$.

Da alle Bahnen von $\widetilde{X}$ unter Γ in den Bahnen unter $\pi_1(X, x)$ liegen, erhalten wir eine natürliche Abbildung $f : \Gamma \backslash \widetilde{X} \to \pi_1(X, x) \backslash \widetilde{X} \cong X)$. Diese ist offensichtlich eine Überlagerung, und das Bild von $\pi_1(\Gamma \backslash \widetilde{X}, \Gamma\tilde{x})$ in $\pi_1(X, x)$ ist offensichtlich Γ. ○

Beispiel 3.3.17 Was es nicht alles gibt...

Ein n-dimensionaler Torus ist topologisch der Quotient

$$T = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n.$$

Das ist eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, denn $\mathbb{Z}^n$ operiert fixpunktfrei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^n$.

Die kanonische Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf T ist die universelle Überlagerung, also ist $\mathbb{Z}^n$ die Fundamentalgruppe von T.

Da diese Gruppe abelsch ist, sind alle Konjugationsklassen von Untergruppen einelementig, wir erhalten also eine Bijektion zwischen den Untergruppen von $\mathbb{Z}^n$ und den Überlagerungen von T. Der zu $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^n$ gehörende Überlagerungsraum ist $\Gamma\backslash\mathbb{R}^n$, die Decktransformationsgruppe von diesem über T ist $\mathbb{Z}^n/\Gamma$.

Insbesondere sind alle Überlagerungen von $S^1 = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ entweder die universelle Überlagerung oder von der Form

$$S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$$

für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$.

Die zu n und $-n$ gehörenden Überlagerungen sind hierbei isomorph.

Als Nebenprodukt erhalten wir noch, dass jede stetige Abbildung eines einfach zusammenhängenden wegzusammenhängenden Raums Y nach T sich liften lässt zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : Y \to \mathbb{R}^n$. Da dieser Raum kontrahierbar ist, ist $\tilde{f}$ nullhomotop, und das gilt dann auch für f. Insbesondere zeigt das auch, dass für $k \geq 2$ die k-te Homotopiegruppe von T trivial ist:

$$\pi_k(T) = \{1\}.$$

Das hatten wir für $n = 1$ in 3.2.24 schon angedeutet.

Beispiel 3.3.18 Der spinnt

Eine physikalisch interessante Überlagerung ist die folgende.

Es sei $G = \mathrm{SO}(3)$ die orthogonale Gruppe in Dimension 3. Sie wird von der unitären Gruppe $\widetilde{G} = \mathrm{SU}(2)$ überlagert, es ist nämlich

$$G \cong \widetilde{G}/\{\pm 1\}.$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Quaternionenalgebra

$$\mathcal{H} := \{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Das ist ein Teilring des komplexen Matrizenrings.

Darin liegt unsere Gruppe

$$\mathrm{SU}(2) = \{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\},$$

denn dieser Ausdruck ist gerade die Determinante. In $\mathcal{H}$ findet sich aber auch der dreidimensionale reelle Vektorraum

$$V = \{A \in \mathcal{H} \mid \mathrm{Spur}(A) = 0\} = \{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\mathrm{i}\}.$$

Die Determinante einer solchen Matrix $A \in V$ ist ebenfalls $|a|^2 + |b|^2$, sie ist also das Quadrat der Normform des Standardskalarprodukts auf V mit der naheliegenden Basis.

Für $g \in \mathrm{SU}(2)$ und $A \in V$ gilt dann:

$$gAg^{-1} \in V \text{ und } \det(gAg^{-1}) = \det A.$$

Also operiert $\mathrm{SU}(2)$ über normerhaltende lineare Abbildungen auf V, und das liefert nach Basiswahl einen Homomorphismus

$$p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3).$$

Der Kern hiervon ist gerade ± 1, und demnach ist die Abbildung nicht nur stetig, sondern – aus Dimensionsgründen – auch offen. Da $\mathrm{SO}(3)$ zusammenhängend und hausdorffsch ist und $\mathrm{SU}(2)$ kompakt, ist p surjektiv und ein lokaler Homöomorphismus. Also eine Überlagerung.

Diese Überlagerung ist letztlich für ein Phänomen der Quantenmechanik relevant: für die Existenz von Teilchen mit halbzahligem Spin. Der Mechanismus ist der, dass ausgehend von rotationssymmetrischen Annahmen die Differentialgleichungen für freie Teilchen formuliert werden. Diese Differentialgleichungen sehen aber nicht mehr die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$, die die Rotationssymmetrie liefert, sondern nur noch deren Tangentialraum im Einselement (in Form von Differentialoperatoren). Dieser Raum wird vermöge p mit dem Tangentialraum an $\mathrm{SU}(2)$ im Einselement identifiziert. Wenn man nun „infinitesimal bekannte“ Wege zur Gruppe hochliften möchte, wird man oft nicht in $\mathrm{SO}(3)$ landen können, sondern nur in deren universellen Überlagerung $\mathrm{SU}(2)$. Auch wenn man das Gefühl hat, sich um $360°$ zu drehen, kann das oben in $\mathrm{SU}(2)$ eventuell nur die halbe Miete sein: es gibt in $\mathrm{SO}(3)$ geschlossene Wege, die nicht nulhomotop sind, aber der zweimal durchlaufene Weg schon.

Beispiel 3.3.19 Logarithmus

Ein anderes nettes Beispiel für das Schöne an Überlagerungen ist der komplexe Logarithmus.

Stellen Sie sich vor, Sie hätten in der komplexen Ebene die Differentialgleichung

$$f'(z) = 1/z$$

gegeben.

Sie hat eine Singularität in $z = 0$. Aber um jeden Punkt $z_0 \neq 0$ gibt es eine Umgebung, in der die Gleichung mit beliebigem Startwert $f(z_0) = w_0$ eindeutig gelöst werden kann. Wenn man nun bei $z_0 = 1$ startet und versucht, die Lösung mit $f(1) = 0$ fortzusetzen, so kann man das ein Stück weit machen, aber wenn man zu $z = 1$ zurückkehrt, wird man in aller Regel nicht wieder den Wert 0 herausbekommen, sondern ein Element von $\mathbb{Z} \cdot 2\pi\mathrm{i}$.

Das liegt topologisch gesehen daran, dass hier in Wirklichkeit ein Problem auf der universellen Überlagerung von $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ behandelt wird, das sich dort sehr einfach lösen lässt.

Die universelle Überlagerung von X ist $\mathbb{C}$, die Überlagerungsabbildung ist die komplexe Exponentialfunktion:

$$p(w) := \exp(2\pi\mathrm{i}w) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\pi\mathrm{i}w)^k / k!$$

Wenn f eine Lösung unserer alten Differentialgleichung in einer - sagen wir - Elementarumgebung für p ist, dann gilt auf einer Komponente von $p^{-1}(U)$ für die Funktion $g = f \circ p = f(\exp(2\pi\mathrm{i}w))$

$$g'(w) = f'(\exp(2\pi\mathrm{i}w)) \cdot 2\pi\mathrm{i} \exp(2\pi\mathrm{i}w) = 2\pi\mathrm{i}.$$

Das heißt:

$$g(w) = 2\pi\mathrm{i}w + c$$

für eine konstante c. Das ist wunderbarer Weise auf ganz $\mathbb{C}$ konsistent lösbar.

Wenn man nun auf der Faser eines Punktes $z \in X$ unter p entlang hüpft, ändert sich der Wert von diesem g immer um Vielfache von $2\pi\mathrm{i}$, und das ist gerade das in X beobachtete Phänomen.

Beispiel 3.3.20 Zwei Singularitäten

Wenn wir auf $\mathbb{C}$ die Differentialgleichung

$$f'(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

betrachten, dann ist diese immer noch lokal wunderbar lösbar für belibige Startwerte, allerdings haben wir jetzt zwei Singularitäten.

Es ist nun nicht mehr so einfach, die universelle Überlagerung hinzuschreiben. Die Lösung ist nun im Wesentlichen von der Gestalt $-\ln(z) + \ln(z-1)$, und man hat in jedem der beiden Summanden die Freiheit, einen Zweig der Logarithmusfunktion auszuwählen. In jedem Fall ist die Funktion wieder „mehrdeutig“, und es wird prinzipiell besser, wenn wir zur universellen Überlagerung übergehen. Die Fundamentalgruppe von $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$ ist frei in zwei Erzeugern, also muss auch die Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerung diese Eigenschaft haben.

Wir zaubern sie aus dem Hut durch Betrachtung von

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

Hierauf operiert $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ durch Möbiustransformationen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z := \frac{az+b}{cz+d},$$

und diese Aktion ist isometrisch bezüglich der hyperbolischen Metrik $\mathrm{d}_{\mathbb{H}}$. Jede fixpunktfreie Untergruppe Γ von $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, die diskrete Bahnen auf $\mathbb{H}$ hat, operiert daher eigentlich diskontinuierlich. Denn: Für $z \in \mathbb{H}$ ist $\Gamma * z$ diskret, also gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\Gamma * z \cap B_{2\varepsilon}(z) = \{z\}.$$

Daher sind die Kugeln $B_\varepsilon(z)$ und $\gamma * B_\varepsilon(z)$ disjunkt, wenn γ nicht das Einselement ist.

Also ist Γ die Fundamentalgruppe von $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, denn $\mathbb{H}$ ist einfach zusammenhängend und wir haben 3.3.15.

Speziell für die Gruppe

$$\Gamma := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}, a,d \text{ ungerade, } c,d \text{ gerade, } ad-bc=1\}/\pm 1$$

kann man verifizieren, dass $\Gamma(2)\backslash\mathbb{H}$ eine Kugel ohne drei Punkte ist, also $\mathbb{C}$ ohne 2 Punkte.

Allerdings ist es jetzt etwas schwerer, die Überlagerungsabbildung $\mathbb{H} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$ hinzuschreiben.

Dieses und ähnliche Phänomene werden mithilfe der Theorie der Modulformen behandelt.

Bemerkung 3.3.21 Zu guter Letzt

a) Wir haben noch kein allgemeines Kriterium, wann es zu einem zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raum X eine universelle Überlagerung gibt. Es lässt sich relativ leicht einsehen, dass hier jeder Punkt $x \in X$ eine

Umgebung U haben muss, sodass das Bild von $\pi_1(U,x)$ in $\pi_1(X,x)$ unter der Einbettung von U nach X trivial ist. Solche Räume heißen *semilokal einfach zusammenhängend*.

Wenn X umgekehrt diese Eigenschaft hat, dann gibt es auch eine universelle Überlagerung. Diese konstruiert man, indem man für festes $x_0 \in X$ den Raum $\widetilde{X}$ der Homotopieklassen aller Wege $\alpha : I \to X$ mit $\alpha(0) = x_0$ betrachtet, wobei Homotopien wieder relativ zum Rand von I zu nehmen sind. Das heißt insbesondere, dass alle Homotopieklassen einen festen Endpunkt haben, und wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung

$$p : \widetilde{X} \to X, [\alpha] \mapsto \alpha(1).$$

Nun wird $\widetilde{X}$ noch so topologisiert, dass dies eine Überlagerung ist. Dazu wählt man sich für jedes $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung U_x, deren Fundamentalgruppe in X verschwindet.

Als Umgebung eines Punktes $[\alpha] \in \widetilde{X}$ mit $p([\alpha]) = x$ nimmt man dann die Homotopieklassen von Wegen

$$\alpha \bullet \beta, \quad \beta : I \to U_x, \beta(1) = \alpha(0) = x.$$

Man muss nachrechnen, dass die so ermittelte Topologie das tut, was man will.

b) Jede Mannigfaltigkeit ist semilokal einfach zusammenhängend, da jeder Punkt ja sogar eine Umgebungsbasis aus Mengen hat, deren Fundamentalgruppen trivial sind.

Für orientierbare differenzierbare Kurven gibt es drei Möglichkeiten für die universelle Überlagerung: $S^2, \mathbb{R}^2$ oder $B_1(0)$, die zweidimensionale offene Einheitskugel. Leztere ist homöomorph zur oberen Halbebene $\mathbb{H}$ aus dem letzten Beispiel.

c) Die berühmte *geometrization conjecture* von Thurston[5] besteht darin, dass jede kompakte orientierbare differenzierbare dreidimensionale Mannigfaltigkeit diffeomorph ist zu einer geschickten Vereinigung von Teilmannigfaltigkeiten, die durch eine gut verstandene universelle Überlagerung gut zu handhaben sind.

Dies ist wohl mittlerweile von Perelman[6] bewiesen, der dafür 2006 die Fieldsmedaille hätte bekommen können, hätte er nur gewollt. Als Spezialfall ist damit auch die Poincaré[7]-Vermutung bewiesen.

[5] William Thurston, geb. 1946
[6] Grigori Yakovlevich Perelman, geb. 1966
[7] Jules-Henri Poincaré, 1854-1912

Kapitel 4

Index

Ich fange an mit einer kleinen Auflistung von Symbolen.

$\mathring{A}$	das Innere von A
$\bar{A}$	der Abschluss von A
∂A	der Rand von A
$\mathcal{B}(X, Y)$	beschränkte Abbildungen von X in den metr. Raum Y
$B_r(x)$	offene Kugel vom Radius r um x
$\mathcal{C}(X, Y)$	stetige Abbildungen von X nach Y
d	Metrik eines metrischen Raums
$\mathrm{Deck}(p)$	Decktransformationsgruppe der Überlagerung p
$\lvert f \rvert_\infty$	Supremumsnorm der beschränkten Funktion f
I	das Einheitsintervall (Kap. 3) oder eine Indexmenge
$M/\cong$	Quotientenmenge von M nach der Äquivalenzrelation $\cong$
$\mathrm{mSpec}(\mathcal{A})$	Maximalspektrum der Algebra $\mathcal{A}$
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge der Menge M
$\mathbb{P}^n(K)$	projektiver Raum der Dimension n über dem Körper K
$\pi_n(X, *)$	n-te Homotopiegruppe eines punktierten Raums
S^n	n-dimensionale Einheitssphäre
$S(X)$	Suspension von X
$\overleftarrow{\sigma}$	zu σ inverser Weg
$\chi(\gamma, x)$	Umlaufzahl von γ um x
$[X, Y]$	Menge der Homotopieklassen in $\mathcal{C}(X, Y)$
$(X, *)$	punktierter Raum
$\Omega(X)$	Schleifenraum von X
$\bullet$	Aneinanderhängung zweier Wege (-klassen…)

Und dann wäre da noch das Stichwortverzeichnis…