Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

24.10.2007

Topologie – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien (X,d) und (Y,e) metrische Räume. Zeigen Sie, dass auf $X \times Y$ sowohl durch

$$f_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{d(x_1,x_2)^2 + e(y_1,y_2)^2}$$

als auch durch

$$f_\infty((x_1,y_2),(x_2,y_2)) := \max(d(x_1,x_2), e(y_1,y_2))$$

eine Metrik gegeben ist.

Finden Sie eine Konstante $c > 0$, sodass $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$:

$$\frac{1}{c} f_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \leq f_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \leq c f_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien X und Y Mengen. Konstruieren Sie eine Menge D mit Abbildungen

$$f : X \longrightarrow D, \quad g : Y \longrightarrow D,$$

sodass für jede Menge Z und jedes Paar von Abbildungen

$$k : X \longrightarrow Z, \quad l : Y \longrightarrow Z$$

eine eindeutig bestimmte Abbildung $c : D \longrightarrow Z$ existiert mit

$$k = c \circ f, l = c \circ h.$$

Zeigen Sie außerdem, dass je zwei solcher Mengen in Bijektion zueinander stehen und überlegen Sie sich, wie viele sinnvolle Bijektionen (also solche, die etwas mit der Problemstellung zu tun haben) es hier gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $K \subseteq L$ zwei Körper. Zeigen Sie, dass die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z := \frac{az+b}{cz+d}$$

eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2(K)$ auf $X := L \setminus K$ definiert.

Im Folgenden sei $K := \mathbb{R}$ und $L := \mathbb{C}$.

Welche Elemente aus $\mathrm{GL}_2(K)$ haben Fixpunkte in X?

Ist die Operation transitiv?

Abgabe: Bis Mittwoch, 31.10.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.