Lösung von Aufgabe 4 des 2. Übungsblattes

Sei $p \geq 3$ ein Primzahl und d der p-adische Abstand auf $\mathbb{Q}$: $d(x,y) = |x-y|_p$, wobei für $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $x = p^k \frac{a}{b}$, mit $p \nmid a, b$ und $|x|_p = p^{-k}$

(a) Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ wobei $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto x^2$.

Seien also $x \in \mathbb{Q}$ mit $x = p^l \cdot \dfrac{a}{b}$, $p \not| \, a, b$ und $\epsilon > 0$.

Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt dann: $B_{p^{-k}}(x) = \{x + p^k \cdot \dfrac{c}{d} \mid \ p \nmid d\}$.

Ist also $u = x + p^k \cdot \dfrac{c}{d} \in B_\epsilon(x)$, dann gilt:

$$f(u) = \left(x + p^k \cdot \frac{c}{d}\right)^2 = \underbrace{p^{2l} \cdot \frac{a^2}{b^2}}_{=x^2} + 2p^{k+l} \cdot \frac{ac}{bd} + p^{2k} \cdot \frac{c^2}{d^2}$$

Damit folgt:

$$f(u) \in B_\epsilon(f(x)) \Longleftrightarrow \max(p^{-(k+l)}, p^{-2k}) < \epsilon.$$

Wählt man also $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $\max(p^{-(k+l)}, p^{-2k}) < \epsilon$ ist und setzt dann $\delta := \max(p^{-(k+l)}, p^{-2k})$, gilt demnach $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$.

Das zeigt (a).

(b) Sei a mit $d(a^2, -1) \leq \frac{1}{p^k}$ gefunden

$\Leftrightarrow |a^2 - (-1)|_p = |a^2 + 1|_p \leq \frac{1}{p^k} \Rightarrow a^2 + 1 = p^k b,\ b \in \mathbb{Z}$.

Wir suchen ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $|(a + cp^k)^2 + 1|_p \leq \frac{1}{p^{k+1}}$. Es soll also gelten:

$$(a + cp^k)^2 + 1 = a^2 + 2p^k ac + p^{2k}c^2 + 1 = p^k b + 2p^k ac + p^{2k}c^2 = p^k(2ac + b) + p^{2k}c^2 \overset{!}{=} p^{k+1}\tilde{a}.$$

Damit das erfüllt ist, muss gelten: $2ac + b \equiv 0 \pmod p$. Da $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper ist, gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$, das diese Gleichung löst (a^2 kann nicht kongruent $0 \mod p$ sein, das sonst $d(a^2, -1) = p^0 = 1$ wäre).

(c) Setze $x_0 := 2$, denn $d(x_0^2, -1) = |4 + 1|_p = \frac{1}{5}$.
Nach (b) gibt es ein $c_1 \in \mathbb{Z}$ mit $d((x_0 + c_1 p)^2, -1) \leq \frac{1}{5^2}$.

Setze $x_1 := x_0 + c_1 p$. Nach (b) gibt es jetzt wieder ein $c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $d((x_1 + c_2 p)^2, -1) \leq \frac{1}{5^3}$.

Setze $x_2 := x_1 + c_2 p$. Et cetera ...

Die so konstruierte Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge:

Nach Konstruktion gilt nämlich $|x_{n+1} - x_n|_p \leq \frac{1}{p^n}$, und daraus folgt wegen $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$, dass (x_n) Cauchy-Folge ist (denn daraus folgt direkt, dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m > n$ gilt: $|x_m - x_n|_p \leq |x_{n+1} - x_n|_p$).

Nach Konstruktion konvergiert (x_n^2) gegen -1. Nach (a) ist die Abbildung $x \mapsto x^2$ stetig. Wäre also die Folge (x_n) konvergent mit Grenzwert x, so müsste gelten: $x^2 = -1$, d.h. $x \notin \mathbb{Q}$!