Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

31.10.2007

Topologie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei (X,d) ein beschränkter metrischer Raum. Wir versehen die Menge $\mathcal{C}_b(X)$ der beschränkten stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit der Supremumsnorm

$$|f|_\infty := \sup\{f(x)|x \in X\}$$

und der daraus resultierenden Metrik

$$d_\infty(f,g) := |f-g|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x \in X$ die Funktion

$$f_x : X \longrightarrow \mathbb{R},\ y \mapsto d(x,y) =: f_x(y),$$

stetig und beschränkt ist, und dass

$$X \ni x \mapsto f_x \in \mathcal{C}_b(X)$$

abstandserhaltend ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien (X,d) ein metrischer Raum und $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton wachsende nicht konstante konkave Funktion mit $f(0) = 0$.
Erinnerung: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0,1]$ gilt, dass $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

Zeigen Sie:

(a) $f \circ d$ ist eine Metrik auf X.

(b) Wenn f streng monoton ist, dann definieren d und $f \circ d$ dieselbe Topologie auf X.

(c) Auch wenn f streng monoton ist, könnte X bezüglich d vollständig und bezüglich $f \circ d$ nicht vollständig sein. (Beispiel!)

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $X = \mathbb{R}^2$ versehen mit der SNCF-Metrik:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|, & x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{R} \\ |x| + |y|, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $|\cdot|$ die übliche Länge im euklidischen Standardraum ist.

(a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

(b) Skizzieren Sie $B_1(\binom{2}{0})$ und $B_3(\binom{2}{0})$.

(c) Zeigen Sie, dass
$$K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |x| \leq 2\}$$
in X abgeschlossen und beschränkt ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Teilmenge K aus (c) eine Überdeckung mit unendlich vielen offenen Teilmengen hat, aus der man keine endliche Überdeckung von K auswählen kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $p \geq 3$ eine Primzahl und d der p-adische Abstand auf $\mathbb{Q}$. Diesen und keinen anderen wollen wir jetzt verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.

(b) Es sei $a \in \mathbb{Z}$ gefunden mit $d(a^2, -1) \leq 1/p^k$ für eine natürliche Zahl $k \geq 1$.
Zeigen Sie, dass eine ganze Zahl c existiert, sodass $d((a + cp^k)^2, -1) \leq 1/p^{k+1}$.

(c) Konstruieren Sie für $p = 5$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$, die in $\mathbb{Q}$ nicht konvergiert, weil ihr Grenzwert eine Quadratwurzel von -1 sein müsste.

Abgabe: Bis Mittwoch, 7.11.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.