Universität Karlsruhe 7.11.2007
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

Topologie – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Topologien auf der Menge $X := \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Für einen topologischen Raum X und $A \subseteq X$ ist A genau dann sowohl offen als auch abgeschlossen, wenn gilt: $\partial A = \emptyset$.

(b) $x \in \partial A \iff$ jede Umgebung von x hat sowohl mit A als auch mit $X \setminus A$ nichtleeren Schnitt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt Zariski-abgeschlossen, wenn es Polynome $P_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n], i \in I$ gibt (I sei eine beliebige Indexmenge), sodass

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P_i(z) = 0 \text{ für alle } i \in I\}.$$

Eine Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ heißt Zariski-offen, wenn ihr Komplement Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie:

(a) Die Zariski-offenen Mengen bilden eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$. Diese heißt *Zariski-Topologie*.

(b) Die Familie offener Mengen

$$\mathcal{B} := \{U \subseteq \mathbb{C}^n \mid \text{das Komplement von } U \text{ ist Nullstellenmenge eines Polynoms}\}$$

ist eine Basis der Zariski-Topologie.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Auf $\mathbb{Z}$ betrachten wir die Topologie, die die Mengen

$$\{a + b\mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

als Subbasis besitzt.

Zeigen Sie, dass jede dieser Mengen auch abgeschlossen ist, und dass auch $\{-1, 1\}$ abgeschlossen ist.

Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.11.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.