Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

21.11.2007

Topologie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(X, \leq)$ eine Menge mit einer Ordnungsrelation $\leq$.
Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \forall u \in U, x \in X : u \leq x \Rightarrow x \in U\}$$

eine Topologie auf X ist. Hier ist sogar der Schnitt einer beliebigen Familie offener Mengen wieder offen.
Wenn eine weitere Menge Y mit einer Ordnungsrelation und der zugehörigen Topologie versehen ist, was ist die Beziehung zwischen den ordnungserhaltenden und den stetigen Abbildungen von X nach Y?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 1 \,\text{und}\, A^T A = E_n\}$ versehen mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^{n\times n}$ zusammenhängend ist, $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = E_n\}$ aber nicht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt: U ist genau dann wegzusammenhängend, wenn U zusammenhängend ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an, die zwar zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X.

(a) $Y := X/\sim$ sei versehen mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie: Ist Z ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to Z$ eine Abbildung, so ist f genau dann stetig, wenn $f \circ \pi$ stetig ist (dabei sei $\pi : X \to Y$ die kanonische Projektion).

(b) Zeigen Sie: Die Quotiententopologie auf Y ist durch die Eigenschaft in (a) eindeutig charakterisiert.

Abgabe: Bis Mittwoch, 28.11.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.