Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

28.11.2007

Topologie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien X_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ endliche Mengen. Auf $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ definieren wir den Abstand

$$d((x_k),(y_k)) := \begin{cases} 0, & x_k = y_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0 \\ 2^{-m}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $m := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid x_k \neq y_k\}$.

(a) Beschreiben Sie $B_r((x_k))$ für $r > 0$.

(b) Zeigen Sie: $\prod_{k=0}^{\infty} X_k$ ist kompakt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte für alle $x \in U$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \neq 0.$$

Zeigen Sie: Dann ist $\{x \in U \mid f(x) = 0\}$ eine $(n-1)$-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: X ist genau dann ein Hausdorffraum, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ abgeschlossen ist in $X \times X$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei K ein kompakter topologischer Raum, der gleichzeitig eine Gruppenstruktur trägt. Weiter sei $\Phi : K \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eine stetige Abbildung, die auch ein Gruppenhomomorphismus ist.
Zeigen Sie: Für $k \in K$ haben die Eigenwerte von $\Phi(k)$ Betrag 1 und $\Phi(k)$ ist diagonalisierbar.

Abgabe: Bis Mittwoch, 5.12.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.