

## Topologie – Übungsblatt 8

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

- (a) Sei  $K := \overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Zeigen Sie: Jede stetige Abbildung  $G : K \rightarrow K$  hat mindestens einen Fixpunkt.

Nehmen Sie dazu an,  $G$  habe keinen Fixpunkt, und zeigen Sie dann:

Für  $x \in K$  sei  $\lambda_x \in \mathbb{R}_{>0}$  die eindeutig bestimmte Zahl, für die gilt:  $G(x) + \lambda_x(x - G(x)) \in S^1$ . Dann ist  $\lambda : K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda_x$  stetig.

Führen Sie damit obige Annahme zum Widerspruch.

- (b) Zeigen Sie: Ist  $X$  ein topologischer Raum, der homöomorph zu  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist, dann hat jede stetige Abbildung  $G : X \rightarrow X$  mindestens einen Fixpunkt.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige geschlossene Kurve,  $x \in \mathbb{R}^2$  und  $\chi(\gamma, x)$  die Umlaufzahl von  $\gamma$  um  $x$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\chi(\gamma, x)$  hängt stetig von  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \gamma([0, 1])$  ab, ist also auf den Zusammenhangskomponenten konstant.
- (b) Es gibt eine Zusammenhangskomponente, auf der  $\chi(\gamma, x) = 0$  ist.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  ein Ultrafilter auf  $X$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\mathcal{F}$  konvergiert gegen ein  $x \in X$ .
- (b) Ist  $X$  ein Hausdorffraum, so ist dieses  $x$  eindeutig durch  $\mathcal{F}$  festgelegt.
- (c) Ist  $X$  endlich, so gibt es ein  $x \in X$  mit  $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ .

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $x \in X$ .

- (a) Ein Punkt  $x \in X$  liegt genau dann in  $\overline{A}$ , wenn es einen Filter mit  $A \in \mathcal{F}$  gibt, der gegen  $x$  konvergiert.
- (b) Im Allgemeinen gibt es nicht für jedes  $x \in \overline{A}$  eine Folge in  $A$ , die gegen  $x$  konvergiert.

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 19.12.2007, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.