Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein
Dipl. Math. Oliver Bauer

19.12.2007

Topologie – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl, für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ versehen mit der diskreten Topologie. Wir betrachten in $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ die Menge aller Tupel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X_n$, sodass

$$\forall m \geq n : x_m \equiv x_n \ (\bmod\ p^n\ ).$$

Diese Menge heißt $\mathbb{Z}_p$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}_p$ ist ein Ring.

(b) $\mathbb{Z}_p$ ist kompakt.

(c) Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ gegeben durch $a \mapsto ((a + p^n\mathbb{Z}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist injektiver Ringhomomorphismus.

(d) In $\mathbb{Z}_5$ gibt es ein Element w mit $w^2 = -1$.

(e) In $\mathbb{Z}_3$ gibt es kein Element w mit $w^2 = -1$.

(f) $\mathbb{Z}_p$ ist überabzählbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein normaler Raum und $\overline{X}$ seine Stone-Čech-Kompaktifizierung. Weiter sei K ein kompakter normaler topologischer Raum und $\Phi : X \to K$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: Φ kann eindeutig zu einer stetigen Abbildung $\overline{X} \to K$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$ die Banachalgebra der beschränkten stetigen Funktionen auf X. Zeigen Sie: Jeder $\mathbb{C}$-lineare Ringhomomorphismus $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ist stetig.
Wer will, kann dies auch für ein beliebige kommutative Banachalgebra zeigen.

Bitte wenden

Abgabe: Bis Mittwoch, 9.1.2008, 14.00 in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Entscheiden Sie bei folgenden Fragen, welche Antwort die richtige ist. Eine genaue Begründung ist nicht verlangt.

(i) Jede Basis der Topologie eines Raums ist auch Subbasis derselben Topologie.

☐A Nein. Eine Basis muss keine Subbasis sein.
☐B Ja.
☐C Nein. Die Basis kann Subbasis einer anderen Topologie sein.

(ii) Welche der folgenden Aussagen über einen beliebigen topologischen Raum ist falsch?

☐A Das Innere jeder Teilmenge ist im Inneren ihres Abschlusses enthalten.
☐B Das Innere jeder Teilmenge ist gleich seinem Inneren.
☐C Der Rand jeder Teilmenge ist abgeschlossen.
☐D Jede abgeschlossene Teilmenge ist gleich dem Abschluss ihres Inneren.

(iii) In welchem der folgenden metrischen Räume (X, d) existiert keine Kugel, die gleichzeitig offen und abgeschlossen ist?

☐A Die reellen Zahlen mit der euklidischen Metrik.
☐B Die rationalen Zahlen mit der euklidischen Metrik.
☐C Das abschlossene Intervall $[0, 1]$ mit der euklidischen Metrik.

(iv) Jede stetige Abbildung von einem kompakten Raum X in einen Raum Y ist abgeschlossen, d.h. das Bild jeder abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen.

☐A Richtig.
☐B Falsch für jede Wahl von X und Y.
☐C Kommt auf Y an.
☐D Kommt auf X an.

(v) Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

☐A Das Urbild jedes kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.
☐B Das Bild jedes kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist kompakt.
☐C Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

(vi) Sei $X = \mathbb{N}$ versehen mit der von den Teilmengen $\{n, 2n, 3n, \dots\}$ für alle n in X erzeugten Topologie. Welche der folgenden Aussagen ist falsch:

☐A X ist kompakt.
☐B Alle drei anderen Aussagen sind richtig.
☐C X ist zusammenhängend.
☐D X ist hausdorffsch.

Wir wünschen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr.